平方根

2 乗すると a になる数を， a の平方根といいます。
式で表すと， $x^2 = a$ にあてはまる x の値が， a の平方根です。

例　9 の平方根
$3^2 = 9$, $(-3)^2 = 9$であるから， 3 も-3 も 9 の平方根です。
＋（プラス）と$-$（マイナス）をまとめて$\pm$（プラスマイナス）の記号を用います。
答え　± 3

例　5 の平方根
$2^2 = 4$, $3^2 = 9$ であるから， 5 の平方根は 9 の平方根のように整数では表せません。ここで 2 乗すると a になる数を， 記号$\sqrt{}$を用いて， $\sqrt{a}$ とかきます。
記号$\sqrt{}$を根号といい， $\sqrt{a}$ を「ルートa」と読みます。
答え　$\pm\sqrt{5}$

平方根の性質

・正の数の平方根には正の数と負の数の 2 つがあり， 絶対値は等しい。
ただし， 0 には正の数も負の数もないので， 0 の平方根は 0 のみである。
・2 乗して負になる数はない*から， 負の数の平方根はない。

注*　正確には 2 乗して負になる数である複素数を高校生になると考えるのだが， 中学校で習う範囲内では存在しないということです。

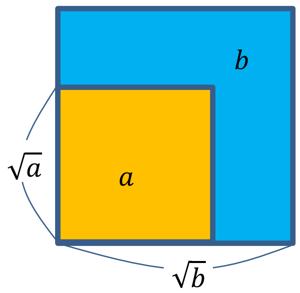
根号の性質

正の数　a について	負の数　b について
$(\sqrt{a})^2 = a$	$(\sqrt{b})^2$はありません
$(-\sqrt{a})^2 = a$	$(-\sqrt{b})^2$はありません
$\sqrt{a^2} = a$	$\sqrt{b^2} = -b$
$-\sqrt{a^2} = -a$	$-\sqrt{b^2} = -(-b) = b$

平方根の大小

　正方形では，１辺の長さが大きくなれば面積も大きくなり，面積が大きくなれば１辺の長さも大きくなります。

　右の図のように，面積が a，b の正方形を重ねて，それらの１辺の長さを考えると，次のことがいえます。



$a > 0$，$b > 0$のとき，$a < b$ ならば，$\sqrt{a} < \sqrt{b}$

平方根の近似値

$4 < 5 < 9$より，$2 < \sqrt{5} < 3$であることがわかります。
小数点以下まで詳しく調べるには，順々に計算していくと，
$2.1^2 = 4.41$，$2.2^2 = 4.84$，$2.3^2 = 5.29$であるから$2.2^2 < 5 < 2.3^2$
よって，$2.2 < \sqrt{5} < 2.3$
$\sqrt{5}$ は 2.2 と 2.3 の間にある数ということがわかります。

有理数と無理数

mを整数，n を 0 でない整数としたとき，分数$\dfrac{m}{n}$で表すことができる数を**有理数**といいます。

$\sqrt{5}$ や円周率πなど，分数で表すことができない，有理数でない数を**無理数**といいます。
中学数学で出てくる無理数は平方根と円周率 π のみである。

有限小数と循環小数

有限小数　分数で表すことができる小数を**有限小数**といいます。

例　$\dfrac{1}{8} = 0.125$

小数点以下の桁数が限りなくつづく小数を**無限小数**といいます。循環小数と循環しない小数とに大別される。

例　$\pi = 3.14159\cdots$，　$\sqrt{5} = 2.2369\cdots$

無限小数のうち，ある位からいくつかの数字が同じ順序で繰り返し現れる分数を**循環小数**といいます。

例　$\dfrac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\dot{3}$，　$\dfrac{23}{111} = 0.207207\cdots = 0.\dot{2}0\dot{7}$($0.\dot{2}\dot{0}\dot{7}$としないのが通例)

循環小数は，繰り返される小数部分の両端の数字の上に・をつけて表す。

数についての基礎知識

① 有理数＋有理数＝有理数　　② 有理数＋無理数＝無理数

③　無理数＋無理数＝有理数 or 無理数	④　有理数×有理数＝有理数
⑤　有理数×無理数＝有理数 or 無理数	⑥　無理数×無理数＝無理数 or 有理数
⑦　有理数÷無理数＝有理数 or 無理数	⑧　無理数÷有理数＝無理数

①, ②, ④については問題ないと思いますので, それ以外を解説していきます。

③について

無理数と無理数の和については基本的には無理数となります。例外として絶対値が同じで符号が異なるものの和は0（有理数）となります。

基本例　$\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$（無理数）　　例外　$\sqrt{3}+\left(-\sqrt{3}\right)=0$（有理数）

⑤について

有理数と無理数の積は基本的には無理数となります。例外として有理数 0 をかけると答えは 0 になるので有理数となります。

基本例　$3\times\sqrt{17}=3\sqrt{17}$（無理数）　例外　$0\times(-\sqrt{10})=0$（有理数）

⑥について

無理数と無理数の積は基本的には無理数となります。例外として根号の中身が同じもの同士の積は有理数となります。

基本例　$\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$（無理数）　　例外　$2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$（有理数）

⑦について

有理数を無理数で割ると基本的には無理数となります。例外として有理数が 0 であれば無理数が何であっても 0 になります。

基本例　$3\div\sqrt{2}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$(無理数)　　例外　$0\div\sqrt{2}=0$(有理数)

⑧について

無理数を有理数で割ると無理数となります。例外はありません。

基本例　$\sqrt{7}\div 2=\dfrac{\sqrt{2}}{7}$（無理数）

Point

無理数か有理数かで迷ったら有理数 0 を考えてみましょう。0 を掛けると有理数でも無理数でも 0 になります。⑦では 0 を掛けて答えが 0 になりましたが, ⑧では数字のルールで 0 で割ることができないことに注意しましょう。

平方根の乗法，　除法

$a>0$，$b>0$　のとき，

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

例　$\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$,　　$\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{12}{6}}=\sqrt{2}$

平方根の変形

$a>0$，$b>0$　のとき，

$$\mathrm{a}\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$$

$$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$$

例

$4\sqrt{3}=\sqrt{4\times4\times3}=\sqrt{48}$

$\sqrt{32}=\sqrt{16\times2}=\sqrt{4^2\times2}=4\sqrt{2}$

$\sqrt{\ }$がついた数の乗法や除法

根号がついた数の乗法や除法では，

① $a\sqrt{b}$の形に変形する。

② 根号の中の数を素因数の積で表す。

③ 整数どうし，根号をふくむ数どうしを計算する。

分母を有理化する

分母に根号がふくまない形にすることを，**分母を有理化する**といいます。

分母の根号を含まない形にするためには$(\sqrt{a})^2=a$　であることを利用する。×1 をしても式の値は変わらないから，　$1=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$と考えて，　1 を掛けると

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times1=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{b}}{\sqrt{b}\times\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$$

例　$\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}$

(☆) 分母の数が大きいときは，　最初に根号の中をできるだけ簡単な数にしてから計算するとよい。

$\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{50}}=\dfrac{\sqrt{27}\times\sqrt{50}}{\sqrt{50}\times\sqrt{50}}=\dfrac{\sqrt{1350}}{50}$ ・・・とすると，　計算が大変です!

$\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{50}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{3\times2}}{5\times2}=\dfrac{3\sqrt{6}}{10}$と計算できます。

平方根の加法，　減法

根号の中が同じ数どうしの和や差は，　分配法則を使って求めます。
根号の中が違う数どうしの和や差は，　計算できません。
根号の中の数をできるだけ簡単な数にしたり，　分母を有理化してから計算します。

例

$$4\sqrt{2}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}-1\sqrt{2}=(4-1)\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

$2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ は根号の数が異なりますのでこれ以上計算することはできません。
$\sqrt{18}+\sqrt{8}$ は一見すると計算できませんが，　$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ であるから，
$\sqrt{18}+\sqrt{8}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ と計算できます。

式の値

因数分解してから式に代入して，　式の値を求める。

例　$x=\sqrt{7}+2$のとき，　式 x^2-4x+4 の値を求めなさい。

そのまま計算すると，

$$\begin{aligned}(\sqrt{7}+2)^2-4\left(\sqrt{7}+2\right)+4&=7+2\times2\sqrt{7}+4-4\sqrt{7}-8+4\\&=7\end{aligned}$$

と計算できますが，　少し計算が大変です！

$x^2-4x+4=(x-2)^2$としてから計算すると，

$$\begin{aligned}&=\left(\sqrt{7}+2-2\right)^2\\&=\left(\sqrt{7}\right)^2\\&=7\end{aligned}$$

因数分解すると簡単になるような問題設定がされています。因数分解をして，　計算が簡単にならないときは，　問題が悪問だと言わざるをえません。どんどん因数分解をしていきましょう。