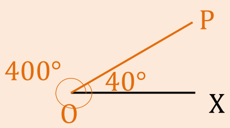
	三角関数	チェック日
C1	三角関数の定義	
C2	動径の表す角	
C3	象限の角	
C4	弧度法→度数法	
C5	度数法→弧度法	
C6	扇形の弧の長さと面積	
C7	三角関数の値(正の角)	
C8	三角関数の相互関係($\sin\theta$(または $\cos\theta$) $= k$ $(b < \theta < c)$ のとき)	
C9	三角関数の相互関係($\tan\theta = k$ $(b < \theta < c)$ のとき)	
C10	三角関数の相互関係($\sin\theta$(または $\cos\theta$) = 定数 のとき)	
C11	三角関数の相互関係($\tan\theta$ =定数のとき)	
C12	三角関数の等式の証明	
C13	三角関数の式の値	
C14	$\sin\theta$, $\cos\theta$ の対称式($\sin\theta + \cos\theta = a$)	
C15	$\sin\theta$, $\cos\theta$ の対称式($\sin\theta - \cos\theta = a$)	
C16	$\sin\theta$, $\cos\theta$ の交代式	
C17	2 解が $\sin\theta$, $\cos\theta$ で表される 2 次方程式	
C18	$\theta + 2n\pi$ の公式の確認	
C19	$-\theta$ の公式の確認	
C20	$\theta + \pi$ の値	
C21	$\theta + \frac{\pi}{2}$ の値	
C22	和が 0 になる三角関数同士の計算	
C23	$y = \sin\theta$, $y = \cos\theta$ のグラフ	
C24	$y = \sin\theta$, $y = \cos\theta$ の周期	
C25	$y = \tan\theta$ のグラフ	
C26	$y = \tan\theta$ の周期	
C27	$y = \tan\theta$ の漸近線	
C28	三角関数のグラフの対称の軸	
C29	三角方程式の解($\sin\theta = a$ or $\cos\theta = a$)	
C30	三角方程式の解($\tan\theta = a$)	
C31	三角不等式の解 ($\sin\theta$ or $\cos\theta$ 不等号が 1 つの場合)	
C32	三角不等式の解 ($\sin\theta$ or $\cos\theta$ 不等号が 2 つの場合)	
C33	三角不等式の解 $\tan\theta$	
C34	平行移動された三角方程式の解	

C35	平行移動された三角不等式の解	
C36	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次＋1 次の方程式の解	
C37	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次＋1 次の不等式の解	
C38	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次＋1 次の三角関数の最大・最小	
C39	文字係数を含む $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次＋1 次の三角関数の最大・最小	
C40	三角方程式の解の個数	
C41	加法定理 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ の証明	
C42	余弦の加法定理から正弦の加法定理の証明	
C43	15°の倍数の三角関数の値（度数法）	
C44	$\frac{\pi}{12}$の倍数の三角関数の値（弧度法）	
C45	正弦と余弦の値がわかっている加法定理の計算	
C46	正弦と余弦の値がわかっていない加法定理の計算	
C47	正接の加法定理の証明	
C48	2 つの角の正接の加法定理の計算	
C49	3 つの角の正接の加法定理の計算	
C50	$\tan 4°$が無理数であることの証明	
C51	2 直線のなす角	
C52	直線とそのなす角の傾き	
C53	2 直線のなす角の証明	
C54	点の原点回転	
C55	点の一般回転	
C56	三角関数の 2 倍角の値	
C57	三角関数の半角の値	
C58	$t=\tan\frac{\theta}{2}$ の等式の証明	
C59	2θ と θ の混合の三角方程式の解	
C60	2θ と θ の混合の三角不等式の解	
C61	三角関数の 3 倍角の証明	
C62	三角関数の 3 倍角の値	
C63	$\frac{\pi}{5}$ の整数倍の角の三角関数の等式の証明	
C64	$\frac{\pi}{5}$ の整数倍の角の三角関数の値	
C65	三角関数の積→和	
C66	三角関数の和→積	
C67	三角形の内角の三角関数の証明問題	

C68	三角方程式の解法	
C69	三角関数の sin 合成(角 α が具体的なとき)	
C70	三角関数の sin 合成(角 α が具体的でないとき)	
C71	三角関数の cos 合成	
C72	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 1 次式の三角方程式の解	
C73	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 1 次式の三角不等式の解	
C74	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 1 次式の三角関数の最大・最小	
C75	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 1 次式の三角関数の最大・最小	
C76	$t=\sin\theta+\cos\theta$ を利用した三角関数の最大・最小	
C77	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次同次式	
C78	2 次同次式の最大・最小(単位円を利用)	
C79	図形への応用	

C1	三角関数の定義
Q1	一般角 θ に対して， $\sin\theta$ の定義を述べよ。
A1	座標平面上で， x 軸の正の部分を始線にとり， 一般角 θ の動径と， 原点を中心とする半径 r の円との交点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。このとき， $\dfrac{y}{x}$ を $\sin\theta$ と定義する。
C2	動径の表す角
Q2	次の角の動径を図示せよ。 $400°$
A2	一般角 θ に対して， 始線 OX から角 θ だけ回転した位置にある動径 OP を， θ の動径といいます。  答え
C3	象限の角
Q3	次の角は第何象限の角か答えよ。 $400°$
A3	第 1 象限の角
C4	弧度法→度数法
Q4	次の角を， 度数に書き直せ。 $270°$

A4	$180° = \pi$ であることを利用して解いていきます。 $\dfrac{270°}{180°} = \dfrac{3}{2}$ であるから，　$270° = \dfrac{3}{2}\pi$　**答え**　$\dfrac{3}{2}\pi$
C5	度数法→弧度法
Q5	次の角を，弧度に書き直せ。 $\dfrac{2}{5}\pi$
A5	$\pi = 180°$ であることを利用して解いていきます。 $\dfrac{2}{5}\pi = \dfrac{2}{5} \times 180° = 72°$　**答え**　$72°$
C6	扇形の弧の長さと面積
Q6	半径 2，　中心角 $\dfrac{2}{5}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。
A6	半径 r，　中心角 θ（ラジアン）の扇形の弧の長さと面積は次のような関係があります。 弧の長さ　$l = r\theta$ 面積　$S = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}rl$ 弧の長さ $l = 2 \times \dfrac{2}{5}\pi = \dfrac{4}{5}\pi$ 面積　$S = \dfrac{1}{2} \times 2^2 \times \dfrac{2}{5}\pi = \dfrac{4}{5}\pi$ **答え**　$l = \dfrac{4}{5}\pi$，　$S = \dfrac{4}{5}\pi$
C7	三角関数の値(正の角)
Q7	θ が次の値のとき，　$\sin\theta$，　$\cos\theta$，　$\tan\theta$ の値を求めよ。 $\dfrac{25}{6}\pi$
A7	角 θ の動径と，　$\theta + 2n\pi$ (n は整数) の動径は一致します。 $\dfrac{25}{6}\pi = \dfrac{1}{6}\pi + 4\pi$ であるから，　$\dfrac{25}{6}\pi$ と $\dfrac{\pi}{6}$ の動径は一致します。 角が $\dfrac{\pi}{6}$，　$\dfrac{\pi}{3}$，　$\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形を考えて， **答え**　$\sin\dfrac{25}{6}\pi = \dfrac{1}{2}$，　$\cos\dfrac{25}{6}\pi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$\tan\dfrac{25}{6}\pi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C8	三角関数の相互関係($\sin\theta$(または $\cos\theta$) $= k$ $(b < \theta < c)$ のとき)
Q8	$\sin\theta = \frac{4}{5}\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$ のとき，　$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。
A8	θ が明示されているときは，　先に $\cos\theta$ と $\tan\theta$ の符号を把握していきます。 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ であるから，　$\cos\theta < 0$，　$\tan\theta < 0$・・・① $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いると， $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ ①より，　$\cos\theta = -\frac{3}{5}$ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，　$\tan\theta = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$ **答え　$\cos\theta = -\frac{3}{5}$，　$\tan\theta = -\frac{4}{3}$**
C9	三角関数の相互関係($\tan\theta = k$ $(b < \theta < c)$ のとき)
Q9	$\tan\theta = 3\left(\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi\right)$ のとき，　$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。
A9	θ が明示されているときは，　先に $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の符号を把握していきます。 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ であるから，　$\sin\theta < 0$，　$\cos\theta < 0$・・・① $\tan\theta$ が明らかなときは，　$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ を用いて $\cos\theta$ の値を先に求めます $\cos^2\theta$ について解くと，　$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \tan^2\theta}$ $\tan\theta = 3$ であるから，　$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + 3^2} = \frac{1}{10}$ ①より，　$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ $\cos\theta$ がわかったら，　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて，　$\sin\theta$ の値を求めます。 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

	①より，　$\sin\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ **答え　$\sin\theta = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，　$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$**
C10	三角関数の相互関係($\sin\theta$(または $\cos\theta$) $=$ 定数　のとき)
Q10	$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき，　$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。
A10	$\sin\theta$ が分かっているときには，　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を利用して，　$\cos\theta$ の値を求めていきます。θ の範囲が示されていないので，　$\cos\theta$ と $\tan\theta$ は2通りあります。 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ $\qquad = 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2$ $\qquad = \dfrac{9}{25}$ よって，　$\cos\theta = \pm\dfrac{3}{5}$ $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき，　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{3}$ $\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$ のとき，　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\dfrac{4}{3}$ **答え　$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$，　$\tan\theta = \dfrac{4}{3}$　または　$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$，　$\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$**
C11	三角関数の相互関係($\tan\theta$ =定数のとき)
Q11	$\tan\theta = 4$ のとき，　$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。
A11	$\tan\theta$ が分かっているときには，　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を利用してまず $\cos\theta$を求めます。θ の範囲が明示されていないので，　符号で場合分けをします。 $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+4^2} = \dfrac{1}{17}$ よって，　$\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{17}}{17}$ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ でも $\sin\theta$ を求めることができますが，　範囲が明示されていないので場合分けが複雑です。

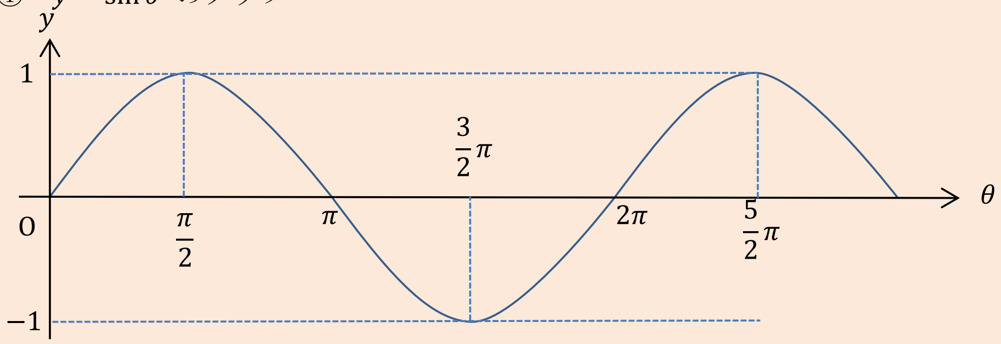
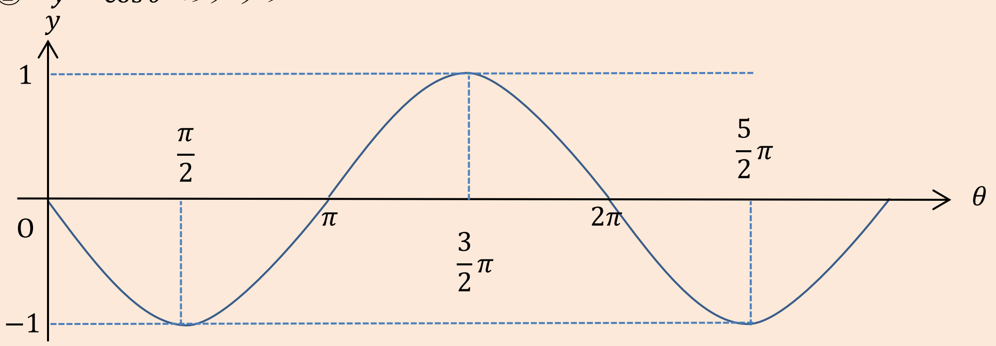
	ですから，　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　すなわち，　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$ を利用します。 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$ のとき，　$\sin\theta=4\cdot\dfrac{\sqrt{17}}{17}=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$ $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{17}}{17}$ のとき，　$\sin\theta=4\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{17}}{17}\right)=-\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$ 答え　$\boldsymbol{\sin\theta=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}}$，　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{\sqrt{17}}{17}}$ または　$\boldsymbol{\sin\theta=-\dfrac{4\sqrt{17}}{17}}$，　$\boldsymbol{\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{17}}{17}}$
C12	三角関数の等式の証明
Q12	次の等式を証明せよ。 $\sin^2\theta-\sin^4\theta=\cos^2\theta-\cos^4\theta$
A12	$\tan\theta$ が現れないので，　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ を用いて式変形していきます。 (左辺) $=\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$ $=\sin^2\theta\cos^2\theta$ $=(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta$ $=\cos^2\theta-\cos^4\theta=$(右辺) よって，　$\sin^2\theta-\sin^4\theta=\cos^2\theta-\cos^4\theta$ であることが示されました。
C13	三角関数の式の値
Q13	次の式を計算せよ。 $\tan^2\theta+(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta$
A13	$\tan\theta$ が関係している公式は，　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ の 2 つが ありますが，　今回は 2 乗があるので，　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\quad\cdots①$ の方がうまくいきそうです。 $\tan^2\theta+(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta=\tan^2\theta+(1+\tan^2\theta)(1-\tan^2\theta)\cos^2\theta$ ($\because$ 因数分解) $=\tan^2\theta+\dfrac{1}{\cos^2\theta}(1-\tan^2\theta)\cos^2\theta$ ($\because$ ①) $=\tan^2\theta+1-\tan^2\theta$ $=1$ 答え　1
C14	$\sin\theta$，　$\cos\theta$ の対称式($\sin\theta+\cos\theta=a$)
Q14	$\sin\theta+\cos\theta=a$ のとき，　$\sin\theta\cos\theta$ と $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値を a を用いて表わせ。

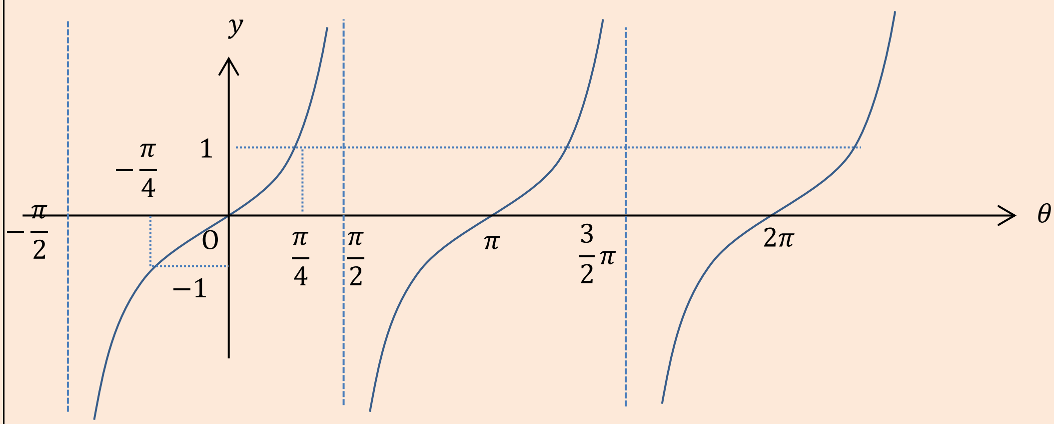
A14	$\sin\theta+\cos\theta=a$ の両辺を 2 乗すると， $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=a^2$ $\sin\theta\cos\theta$ の項が出てくるので， これを利用して値を求めていきます。 $2\sin\theta\cos\theta=a^2-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=a^2-1(\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1)$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{a^2-1}{2}$ $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を入れ替えても変わらないから， 対称式です。対称式では， $\sin\theta+\cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ のみで表すことができるので， まずは因数分解の公式を使って， 式を変形していきます。 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$ $=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$ $=a\left(1-\dfrac{a^2-1}{2}\right)$ $=a\left(\dfrac{2-a^2+1}{2}\right)$ $=\dfrac{a(3-a^2)}{2}$ **答え　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{a^2-1}{2}$，　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\dfrac{a(3-a^2)}{2}$**
C15	$\sin\theta$， $\cos\theta$ の対称式($\sin\theta-\cos\theta=a$)
Q15	$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$　$\sin\theta-\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ のとき， 次の式の値を求めよ。 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$
A15	$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ は対称式であるので， $\sin\theta+\cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ のみで表すことができますが， 両方とも値がわかっていません。 代わりに， $\sin\theta-\cos\theta$ の値が分かっているので， これを 2 乗して， $\sin\theta\cos\theta\to\sin\theta+\cos\theta$ の順に求めていきます。 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\dfrac{1}{4}$ $\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$　$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$ $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{7}{4}$ $\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ であるから， $\sin\theta<0$，　$\cos\theta<0$　すなわち　$\sin\theta+\cos\theta<0$ $\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

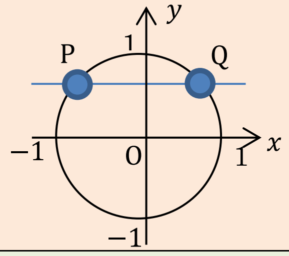
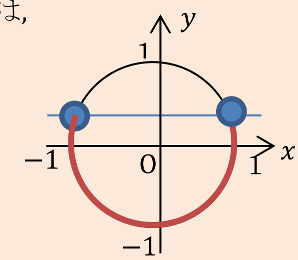
	$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$ $=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$ $=-\frac{\sqrt{7}}{2}\left(1-\frac{3}{8}\right)=-\frac{5\sqrt{7}}{16}$ 答え　$\boldsymbol{\sin^3\theta+\cos^3\theta=-\frac{5\sqrt{7}}{16}}$
C16	$\sin\theta$，　$\cos\theta$ の交代式
Q16	$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき，　次の式の値を求めよ。 $\sin^3\theta-\cos^3\theta$
A16	$\sin^3\theta-\cos^3\theta$ は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を入れ替えると，　$-(\sin^3\theta-\cos^3\theta)$ となり，元の式の-1倍されます。このような式を交代式といいます。 交代式では，　必ず $\sin\theta-\cos\theta$ を因数にもち，　$\sin\theta-\cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ を使って，　表すことができます。 まず，　$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めていきます。 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$ より， $\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$　　$\therefore\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$ これより， $\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$ $=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}$ $=\frac{3}{16}$ 答え $\boldsymbol{\sin^3\theta-\cos^3\theta=\frac{3}{16}}$
C17	2 解が $\sin\theta$，　$\cos\theta$ で表される 2 次方程式
Q17	a を正の定数とし，　θ を $0\leqq\theta\leqq\pi$ を満たす角とする。2 次方程式 $8x^2-4x-a=0$ の 2 つの解が $\sin\theta$，　$\cos\theta$ であるとき，　a，　$\sin\theta$，　$\cos\theta$ の値をそれぞれ求めよ。
A17	2 次方程式の 2 つの解がわかっているときは，　解と係数の関係を利用するのが有効です。 解と係数の関係　$ax^2+bx+c=0$ の解を α，　β とすると， $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，　$\alpha\beta=\frac{c}{a}$

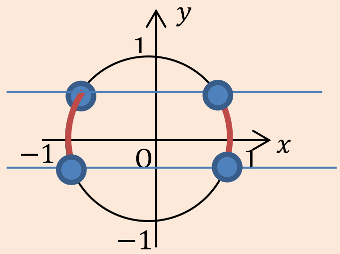
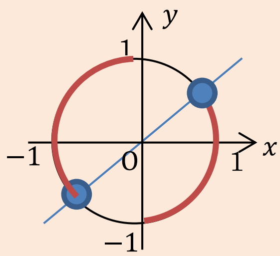
	これを用いると， $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\cdot\cdot$①，　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{a}{8}\cdot\cdot\cdot$② ①を 2 乗して，②を代入すると， $1-\dfrac{a}{4}=\dfrac{1}{4}\quad\therefore a=3$ $8x^2-4x-3=0$ を解の公式で解くと， $x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+24}}{8}=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{4}$ 通常ならば，2つの解の大小関係を考えるところであるが，$0\leqq\theta\leqq\pi$ において， 常に $\sin\theta\geqq0$ であることと，$\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}<0<\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$ より， $\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}$，　$\sin\theta=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$ と分かります。 **答え　$a=3$，　$\sin\theta=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$，　$\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}$**
C18	$\theta+2n\pi$ の公式の確認
Q18	n を整数とする。$\sin(\theta+2n\pi)$，$\cos(\theta+2n\pi)$，$\tan(\theta+2n\pi)$ をそれぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を用いて表わせ。
A18	$\theta+2n\pi$ の動径と θ の動径は等しいので，三角関数の値は等しくなります。 **答え　$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$，　$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$，　$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$**
C19	$-\theta$ の公式の確認
Q19	$\sin(-\theta)$，$\cos(-\theta)$，$\tan(-\theta)$ をそれぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を用いて表わせ。
A19	$\theta\to-\theta$ の図形的な意味合いは，x 軸に関して対称移動するということである。 すると，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$であることがわかります。 **答え　$\sin(-\theta)=-\sin\theta$，　$\cos(-\theta)=\cos\theta$，　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$**
C20	$\theta+\pi$ の値
Q20	$\sin(\theta+\pi)$，$\cos(\theta+\pi)$，$\tan(\theta+\pi)$ をそれぞれ $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を用いて表わせ。
A20	$\theta\to\theta+\pi$ の図形的な意味合いは，原点に関して対称移動するということである。 すると，$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$，$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$，$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$ **答え　$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$，　$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$，　$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$**
C21	$\theta+\frac{\pi}{2}$ の値

Q21	$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$，　$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$，　$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ をそれぞれ $\sin\theta$，　$\cos\theta$，　$\tan\theta$ のいずれかを用いて表わせ。
A21	単位円周上の点 P $(a,\ \ b)$を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点 Q の座標は $(b,\ \ a)$となることから， $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$，　$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$ $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\dfrac{1}{\tan\theta}$ 答え　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$，　$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$，　$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$
C22	和が 0 になる三角関数同士の計算
Q22	次の値を求めよ。 $\sin\frac{15}{7}\pi+\cos\left(-\frac{1}{5}\pi\right)-\cos\frac{6}{5}\pi+\cos\frac{9}{14}\pi$
A22	1 つ 1 つの三角関数の値は求めることができません。このときは，　まず角の動径が鋭角にくるように変形していきましょう。 $\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$ より，　$\sin\frac{15}{7}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{7}+2\pi\right)=\sin\frac{\pi}{7}$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ より，　$\cos\left(-\frac{1}{5}\pi\right)=\cos\frac{1}{5}\pi$ $\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$ より，　$\cos\frac{6}{5}\pi=\cos\left(\frac{1}{5}\pi+\pi\right)=-\cos\frac{1}{5}\pi$ $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$ より，　$\cos\frac{9}{14}\pi=\cos\left(\frac{1}{7}\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{7}$ よって，　$\sin\frac{15}{7}\pi+\cos\left(-\frac{1}{5}\pi\right)-\cos\frac{6}{5}\pi+\cos\frac{9}{14}\pi=\sin\frac{\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{7}$ $=0$ 答え　0
C23	$y=\sin\theta$，　$y=\cos\theta$ のグラフ
Q23	関数 $y=\sin\theta$，　$y=\cos\theta$ のグラフをかけ。
A23	次の点に注意してかきましょう。 横軸は x 軸ではなく θ 軸で考えます。縦軸は y 軸です。 最大値($y=1$)と最小値($y=-1$) をかきます。 最大値・最小値・$y=0$ となる θ の値をかきます。

	グラフは横に無限に広がりますが，少なくとも，$0 \leqq \theta < 2\pi$ はかきます。 ① $y = \sin\theta$ のグラフ  ② $y = \cos\theta$ のグラフ 
C24	$y = \sin\theta$，$y = \cos\theta$ の周期
Q24	関数 $y = \sin\theta$，$y = \cos\theta$ の周期を求めよ。
A24	**答え $y = \sin\theta$の周期 2π，$y = \cos\theta$ の周期 2π**
C25	$y = \tan\theta$ のグラフ
Q25	関数 $y = \tan\theta$ のグラフをかけ。
A25	以下の点に注目してかきましょう。 漸近線 $\theta = -\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$ をかきます。 $y = \pm 1$ とそのときの θ の値をかきます。 $(n\pi,\ 0)$(nは整数) を通る曲線を周期 π ごとにかきます。

	
C26	$y = \tan\theta$ の周期
Q26	関数 $y = \tan\theta$ の周期を求めよ。
A26	一般に周期とは正で最小のものである。 答え　π
C27	$y = \tan\theta$ の漸近線
Q27	関数 $y = \tan\theta$ のグラフの漸近線を求めよ。
A27	関数 $y = \tan\theta$ の値域はすべての実数値をとります。しかし, $\cos\theta$ が 0 となる θ に対しては関数は定義されません。 すなわち, $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$($n$は整数) のときが漸近線となります。 答え　$\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$($n$は整数)
C28	三角関数のグラフの対称の軸
Q28	関数 $y = \sin\theta$, $y = \cos\theta$, $y = \tan\theta$ のグラフの対称の軸を求めよ。
A28	$f(-\theta) = -f(\theta)$ が成り立つ関数のグラフは原点に関して対称 $f(-\theta) = f(\theta)$ が成り立つ関数のグラフは y 軸に関して対称 であることを利用します。 $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$, $\tan(-\theta) = -\tan\theta$であったから, $y = \sin\theta$ と $y = \tan\theta$ は原点対称　すなわち, $y = \theta$ について対称 $y = \cos\theta$ は y 軸に関して対称　すなわち, $\theta = 0$ について対称 答え $y = \sin\theta$ の対称の軸：$y = \theta$ $y = \cos\theta$ の対称の軸：$\theta = 0$ $y = \tan\theta$ の対称の軸：$y = \theta$
C29	三角方程式の解($\sin\theta = a$ or $\cos\theta = a$)
Q29	$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式を解け。また, その一般角を求めよ。

	$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
A29	単位円と直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ との交点を P, Q とすると, 動径 OP, OQ のなす角が求める解である。 なお, 実際の解答では単位円をかかずに, そのまま答えだけかいても OK です。  **答え $\theta = \frac{\pi}{3}, \ \frac{2}{3}\pi$, 一般角 $\theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \ \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$**
C30	三角方程式の解($\tan\theta = a$)
Q30	$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式を解け。また, その一般角を求めよ。 $$\tan\theta = \sqrt{3}$$
A30	$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲内で, $\tan\theta = \sqrt{3}$ となる θ は, $\theta = \frac{\pi}{3}, \ \frac{4}{3}\pi$ である。 **答え $\theta = \frac{\pi}{3}, \ \frac{4}{3}\pi$, 一般角 $\theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \ \frac{4}{3}\pi + 2n\pi$($n$は整数)**
C31	三角不等式の解($\sin\theta$ or $\cos\theta$ 不等号が 1 つの場合)
Q31	$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, 次の不等式を解け。 $$\sin\theta < \frac{1}{2}$$
A31	三角関数の不等式を解くには, 単位円を考えて範囲を考えるとよいです。 単位円をかかずに直接求めようとすると, 意外な落とし穴にはまってしまいます。 $0 \leqq \theta < 2\pi$・・・① の範囲で, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ を満たす θ は, $\theta = \frac{\pi}{6}, \ \frac{5}{6}\pi$ であるから, $\sin\theta < \frac{1}{2}$ を満たす角は $0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6}, \ \frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$・・・②  注：単純に考えて, $\frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{\pi}{6}$ としてはいけません。 これでは大小関係がおかしくなってしまいます。また,

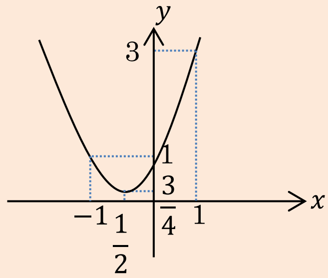
	$\frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{\pi}{6} + 2\pi$ と考えると，①の範囲を超えてしまいます。 ですから，0 を含む範囲があるときは，②のように範囲を分けて記述する必要があります。気をつけていきましょう。 答え　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi < \theta < 2\pi$
C32	三角不等式の解（ $\sin\theta$ or $\cos\theta$ 不等号が 2 つの場合）
Q32	$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。 $$-\frac{1}{2} < \sin\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$
A32	$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ のとき，$\theta = \frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$， $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，$\theta = \frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$  **答え　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi < \frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi < \theta < 2\pi$**
C33	三角不等式の解 $\tan\theta$
Q33	$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。 $$\tan\theta < 1$$
A33	$\tan\theta$ は$\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ のときに定義されないことに注意します。 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のもと，$\tan\theta = 1$ を満たす角は， $\theta = \frac{\pi}{4}$，$\frac{5}{4}\pi$ であるから，  **答え　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5}{4}\pi$，$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$**
C34	平行移動された三角方程式の解
Q34	$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。 $$2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$
A34	$\theta + \frac{\pi}{3} = A$ と置き換えることによって，$\sin A = \frac{1}{2}$ ・・・① を考えればよい。 置き換えをした A を，$0 \leqq \theta < 2\pi$ を用いて，A の範囲を求めていきます。

	$\frac{\pi}{3} \leqq \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi + \frac{\pi}{3}$ よって, $\frac{\pi}{3} \leqq A < \frac{7}{3}\pi$・・・② ②の範囲のもと, ①を解くと, $A = \frac{5}{6}\pi,\ \ \frac{13}{6}\pi$ よって, $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi,\ \ \frac{13}{6}\pi$ から, $\theta = \frac{\pi}{2},\ \ \frac{11}{6}\pi$ **答え $\theta = \frac{\pi}{2},\ \ \frac{11}{6}\pi$**
C35	平行移動された三角不等式の解
Q35	$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式を解け。 $\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) < 1$
A35	$\theta + \frac{\pi}{3} = A$ と置き換えすることによって, $\sin A < \frac{1}{2}$・・・① を考えればよい。 置き換えをした A を, $0 \leqq \theta < 2\pi$ を用いて, A の範囲を求めていきます。 $\frac{\pi}{3} \leqq \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi + \frac{\pi}{3}$ よって, $\frac{\pi}{3} \leqq A < \frac{7}{3}\pi$・・・② ②の範囲のもと, $\sin A = \frac{1}{2}$ を解くと, $A = \frac{5}{6}\pi,\ \ \frac{13}{6}\pi$ よって①は, $\frac{5}{6}\pi < A < \frac{13}{6}\pi$ よって, $\frac{5}{6}\pi < \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{13}{6}\pi$ から, $\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{3} < \theta < \frac{13}{6}\pi - \frac{\pi}{3}$ $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{11}{6}\pi$ **答え $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{11}{6}\pi$**
C36	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次＋1 次の方程式の解
Q36	$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき, 次の方程式を解け。 $2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

A36	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次＋1 次の方程式は，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用することによって，$\cos\theta$ または $\sin\theta$ の 1 種類で表すことができます。1 種類の三角関数で表すことができたら，その三角関数を t で表すことによって，t の 2 次方程式で表すことができます。（慣れてきたら t とおかず，三角関数のままで計算するほうが楽であるが，最初のうちは置き換えをしたほうがわかりやすいと思われるためこの方法で解いています。） $2\sin^2\theta+\cos\theta-1=0$ $2(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-1=0$ $-2\cos^2\theta+\cos\theta+1=0$ $2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$・・・① $\cos\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$・・・② のとき，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから， $-1\leqq t\leqq1$・・・③ ①は，$2t^2-t-1=0$ とおける。 $(2t+1)(t-1)=0$ これを③の範囲で解いて， $t=-\frac{1}{2},\quad 1$ $t=-\frac{1}{2}$ のとき，$\cos\theta=-\frac{1}{2}$，②の範囲でこれを解くと，$\theta=\frac{2}{3}\pi,\quad\frac{4}{3}\pi$ $t=1$ のとき，$\cos\theta=1$，②の範囲でこれを解くと，$\theta=0$ **答え　$\theta=0,\quad\frac{2}{3}\pi,\quad\frac{4}{3}\pi$**
C37	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次＋1 次の不等式の解
Q37	$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。 $2\sin^2\theta+\cos\theta-1>0$
A37	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次＋1 次の不等式は，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用することによって，$\cos\theta$ または $\sin\theta$ の 1 種類で表すことができます。1 種類の三角関数で表すことができたら，その三角関数を t で表すことによって，t の 2 次方程式で表すことができます。（慣れてきたら t とおかず，三角関数のままで計算するほうが楽であるが，最初のうちは置き換えをしたほうがわかりやすいと思われるためこの方法で解いています。） $2\sin^2\theta+\cos\theta-1>0$ $2(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-1>0$ $-2\cos^2\theta+\cos\theta+1>0$ $2\cos^2\theta-\cos\theta-1<0$・・・① $\cos\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$・・・② のとき，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから，

	$-1 \leqq t \leqq 1$・・・③ ①は，$2t^2 - t - 1 < 0$・・・④とおける。 $(2t+1)(t-1) < 0$ ③より，$t - 1 \leqq 0$ である。$t \neq 1$は④を満たさない。 このとき，$t - 1 < 0$ であるから，③を満たすのは，$2t + 1 < 0$ である。 $t < -\frac{1}{2}$ すなわち，$\cos\theta < -\frac{1}{2}$ を③の範囲内で解くと， $\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$ **答え** $\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi}$
C38	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次＋1 次の三角関数の最大・最小
Q38	関数 $y = 2\sin^2\theta + \cos\theta - 1(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。
A38	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次＋1 次の方程式は，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を利用することによって，$\cos\theta$ または $\sin\theta$ の 1 種類で表すことができます。1 種類の三角関数で表すことができたら，その三角関数を t で表すことによって，t の 2 次式で表すことができます。 $y = 2\sin^2\theta + \cos\theta - 1$ $y = 2(1 - \cos^2\theta) + \cos\theta - 1$ $y = -2\cos^2\theta + \cos\theta + 1$ $\cos\theta = t$ とおくと，$0 \leqq \theta < 2\pi$・・・①のとき，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから， $-1 \leqq t \leqq 1$・・・② $y = -2t^2 + t + 1$ $y = -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1$ $y = -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$ ②の範囲内で，$t = \frac{1}{2}$ のとき，最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。 ②の範囲内で，$t = -1$ のとき，最小値 -2 をとる。 $t = \frac{1}{2}$ のとき，すなわち，$\cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき，①を満たす θ は， $\theta = \frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$ である。 $t = -1$ のとき，すなわち，$\cos\theta = -1$ のとき，①を満たす θ は，

	$\theta = \pi$ である。 **答え　$\theta = \frac{\pi}{3}$，　$\frac{5}{3}\pi$ のとき，　最大値 $\frac{3}{2}$，　$\theta = -1$ のとき，　最小値 -2**
C39	文字係数を含む $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次＋1 次の三角関数の最大・最小
Q39	$y = \sin^2\theta + a\cos\theta\left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}\right)$ の最小値を a の式で表せ。
A39	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次＋1 次の三角関数の最大値・最小値を求めるので， $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を利用して，　1 種類の三角関数で表します。 $y = \sin^2\theta + a\cos\theta$ $\quad = 1 - \cos^2\theta + a\cos\theta$・・・① $\cos\theta = t$ とおくと，　$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ のとき，　$0 \leqq t \leqq 1$・・・② ①は， $y = -t^2 + at + 1$ $\quad = -\left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + 1$・・・③ ③の軸と②の区間の位置関係によって場合分けを行います。 ③は上に凸の関数で，　最小値を求めるので，　次の 3 つの場合分けが必要になります。 [1]　軸が区間の左側　[2]　軸 ＝ 区間の中央　[3]　軸が区間の左側 [1]軸が区間の左側　すなわち，　$\frac{a}{2} < \frac{1}{2}$　から　$a < 1$ のとき $t = 1$ のとき最小値　a をとる。 [2]　軸 ＝ 区間の中央　すなわち，　$a = 1$ のとき $t = 0$，　1 のとき最小値　1 をとる。 [3]軸が区間の右側　すなわち，　$1 < a$ のとき $t = 0$ のとき最小値　1 をとる。 **答え　$a < 1$ のとき，　最小値　a，　$1 \leqq a$ のとき，　最小値 1**
C40	三角方程式の解の個数
Q40	a は定数とする。$y = \left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ と $y = a$ との共有点の個数を求めよ。 ただし，　$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。
A40	素直に $\cos\theta = x$ とおいて，　2 次関数と直線の共有点を求めていきます。 なお，　今回の問題は練習用に，　分かりやすく 2 次関数と直線を考えましたが，

	方程式の中に 定数の項 a があるときは，他の関数と直線に分けて考えると考えやすいということを覚えておきましょう。 $\cos\theta = x$ とおく。$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$-1 \leqq x \leqq 1$・・・① $y = f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$・・・② ②の範囲のもとで，①は，$x = 1$ のとき，最大値 3 をとる。 $x = -\frac{1}{2}$ のとき，最小値 $\frac{3}{4}$ をとる。 なお，端点 $x = -1$ で $y = 1$ をとる。 $y = f(x)$ と $y = a$ の交点を考えると，  $a < \frac{3}{4}$ のとき，解なし $a = \frac{3}{4}$ のとき，解は $x = \frac{1}{2}$。これを満たす θ は 2 つ存在する。 $\frac{3}{4} < a < 1$ のとき，x の解は 2 つ。それぞれに対して，満たす θ が 2 つある。 $a = 1$ のとき，解の 1 つは $x = -1$。これを満たす θ は $\theta = \pi$ の 1 つ。 もう 1 つの解に対して，満たす θ は 2 つ存在する。 $1 < a < 3$ のとき，x の解は 1 つ。これを満たす θ は 2 つ存在する。 $a = 3$ のとき，x の解は $x = 1$。これを満たす θ は，$\theta = 0$ の 1 つ。 $3 < a$ のとき，解なし 答え **$a < \frac{3}{4}$ のとき　0個** **$a = \frac{3}{4}$ のとき　2個** **$\frac{3}{4} < a < 1$ のとき　4個** **$a = 1$ のとき　3個** **$1 < a < 3$ のとき　2個** **$a = 3$ のとき，1個** **$3 < a$ のとき，0個**
C41	加法定理 $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ の証明
Q41	単位円を用いて，加法定理 $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ が成り立つこと

	を証明せよ。
A41	座標平面上で，x 軸の正の部分を始線にとり，角 α，$\beta(0<\beta<\alpha<2\pi)$ の動径と，原点を中心とする半径 1 の単位円との交点をP，Qとすると，$\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{Q}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ とおける。 PQ に対して余弦定理より，$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2-2\cdot\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos(\alpha-\beta)$ $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos(\alpha-\beta)$ $\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=2-2\cos(\alpha-\beta)$ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$，$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$ であるから， $2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta=2-2\cos(\alpha-\beta)$ $\therefore\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ (Q.E.D)
C42	余弦の加法定理から正弦の加法定理の証明
Q42	加法定理 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cdots$① が成り立つことを利用して，次の等式が成り立つことを証明せよ。 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\cdots$②
A42	①の β を $-\beta$ に置き換えると， $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$ ここで，$\cos(-\beta)=\cos\beta$，$\sin(-\beta)=-\sin\beta$ であることから， $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\times(-\sin\beta)$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ となり，②が証明されました。
C43	15°の倍数の三角関数の値（度数法）
Q43	加法定理を用いて，次の値を求めよ。 $\sin 15^\circ$
A43	30°，45°の角のように，三角関数の値を求めることができる角に注目して， 加法定理 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ を用いていきます。 $15^\circ=45^\circ-30^\circ$ であるから， $\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$ $=\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ$ $=\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\times\frac{1}{2}$ $=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$ **答え $\sin15^\circ=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$**
C44	$\frac{\pi}{12}$の倍数の三角関数の値（弧度法）

Q44	加法定理を用いて，次の値を求めよ。 $\sin\dfrac{\pi}{12}$
A44	$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{4}$ のように，三角関数の値を求めることができる角に注目して， 加法定理 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ を用いていきます。 $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$ であるから， $\sin 15^\circ=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)$ $=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$ $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}$ $=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **答え　$\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$**
C45	正弦と余弦の値がわかっている加法定理の計算
Q45	$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$とする。$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{1}{2}$ のとき， $\sin(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。
A45	正弦の加法定理　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ・・・① は 4 つの値が必要であるから，$\cos\alpha$ と $\sin\beta$ を別個調べなければなりません。 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より，$\cos\alpha<0$，$\sin\alpha>0$・・・② $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ より，$\cos^2\alpha=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$ ②より，$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$・・・③ $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ より，$\sin^2\beta=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$ ②より，$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$・・・④ ①，③，④より，

	$\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-4-3\sqrt{3}}{10}$ **答え　$\sin(\alpha+\beta)=\frac{-4-3\sqrt{3}}{10}$**
C46	正弦と余弦の値がわかっていない加法定理の計算
Q46	$\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot\cdot\cdot$①，　$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{4}\cdot\cdot\cdot$②のとき，　$\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。
A46	余弦定理　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　より，　$\cos\alpha$，　$\cos\beta$，　$\sin\alpha$，$\sin\beta$　の　4　つの値が分かれば計算することができるが，　条件だけでは求めることができません。 条件は①と②ですが，　これをどのように利用するのでしょうか。 三角関数の和や差は 2 乗することで，　積が現れます。 これを利用すると良さそうです。 ①を 2 乗すると，　$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4}\cdot\cdot\cdot$③ ②を 2 乗すると，　$\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{16}\cdot\cdot\cdot$④ ③＋④を計算すると，　$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$　より， $2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\frac{5}{16}\quad\therefore\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{27}{32}$ よって，　$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{27}{32}$
C47	正接の加法定理の証明
Q47	正弦と余弦の加法定理を用いて，　正接の加法定理 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$（ただし，　$\tan\alpha$，　$\tan\beta$ は実数） が成り立つことを証明せよ。
A47	正弦の加法定理　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 余弦の加法定理　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ より， $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ $=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

	$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \quad \to 1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ の証明の際には，$\cos\theta$ で割りました。これを利用して，$\cos\alpha\cos\beta$ で割っていきます。 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$ $=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$ $=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$(Q. E. D)
C48	2 つの角の正接の加法定理の計算
Q48	$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=5$ のとき，$\tan(\alpha+\beta)$ の値を求めよ。
A48	正接の加法定理　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　を利用します。 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2+5}{1-2\times5}=-\dfrac{7}{9}$ 答え　$-\dfrac{7}{9}$
C49	3 つの角の正接の加法定理の計算
Q49	3 つの鋭角α，β，γ に対して，$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=5$，$\tan\gamma=8$ のとき，$\tan(\alpha+\beta+\gamma)$ と $\alpha+\beta+\gamma$ の値を求めよ。
A49	正接の加法定理　$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$　を 2 回利用します。 3 つの角は鋭角であるので，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$・・・① ①の範囲のもと，$1<\tan\alpha<\tan\beta<\tan\gamma$ であるから， $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\beta<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$・・・② $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2+5}{1-2\times5}=-\dfrac{7}{9}$ $\alpha+\beta=A$ とおくと $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\tan(A+\gamma)$ $=\dfrac{\tan A+\tan\gamma}{1-\tan A\tan\gamma}$

	$= \dfrac{-\frac{7}{9}+8}{1-\left(-\frac{7}{9}\right)\times 8}$ $= 1$ ②より，$\dfrac{3}{4}\pi < \alpha+\beta+\gamma < \dfrac{3}{2}\pi$ であるから，$\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{5}{4}\pi$ **答え　$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = 1$，$\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{5}{4}\pi$**
C50	$\tan 4°$が無理数であることの証明
Q50	$\tan 4°$ が無理数であることを背理法を用いて証明せよ。
A50	$\tan 4°$ が無理数であることを背理法によって証明する。 $\tan 4°$ が有理数であると仮定する。 正接の 2 倍角の公式　$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$　を繰り返し用いると， $\tan 8°$，$\tan 16°$，$\tan 32°$，$\tan 64°$ は有理数である。 ここで，$\tan 60° = \tan(64° - 4°)$ $\sqrt{3} = \dfrac{\tan 64° - \tan 4°}{1+\tan 64° \tan 4°}$ 右辺は有理数であるが，左辺は無理数であるので矛盾する。 したがって，背理法によって $\tan 4°$ が無理数であることが示されました。
C51	2 直線のなす角
Q51	2 直線 $y = 2x + 1$，$y = \dfrac{1}{3}x - 4$ のなす鋭角 θ を求めよ。
A51	2 直線にそれぞれ平行な直線で原点を通る直線はそれぞれ， $y = 2x$・・・①，$y = \dfrac{1}{3}x$・・・② である。 ①，②と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると， $0 < \tan\beta < \tan\alpha$　であるから，$0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$・・・③ ③より，$0 < \alpha - \beta < \dfrac{\pi}{2}$　・・・④であるから，これが求める鋭角 θ である。 正接の加法定理　$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ より， $\tan\theta = \tan(\alpha - \beta)$

	$= \dfrac{2-\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}}$ $=1$ ④より，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ **答え　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$**
C52	直線とそのなす角の傾き
Q52	直線 $y = 3x + 1$ と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす直線の傾きを求めよ。
A52	直線と θ の角をなす直線は，2 つあることに注意しましょう。 傾きを求めたいので，　$\tan\theta$ を使うとよいでしょう。 $y = 3x + 1$ と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると，$\tan\alpha = 3$・・・① 正接の加法定理　$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ より， $\tan\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3+1}{1-3\times 1} = -2$ $\tan\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3-1}{1+3\times 1} = \dfrac{1}{2}$ **答え　$-2,\ \dfrac{1}{2}$**
C53	2 直線のなす角の証明
Q53	交わる 2 直線 $y = ax + b$ と $y = cx + d$ が垂直でないとき，そのなす鋭角を θ と すると，$\tan\theta$ は次の等式を満たす。これを証明せよ。 $\tan\theta = \left\|\dfrac{a-c}{1+ac}\right\|$
A53	2 直線 $y = ax + b$ と $y = cx + d$ のなす角は，それぞれと平行な原点を通る直線，すなわち，$y = ax$・・・① と $y = cx$・・・② のなす角に等しい。 $0 \leqq \beta < \alpha < \pi$ であるから，2 直線①と②のなす角 γ は $\gamma = \alpha - \beta (0 < \gamma < \pi)$・・・③ である。 2 直線 $y = ax + b$ と $y = cx + d$ が垂直でないから，①と②の 2 直線も垂直でない，すなわち，$ac \neq -1$ $\tan\gamma = \tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

	$\tan\gamma=\dfrac{a-c}{1+ac}$ ・・・④ ④は，①と②のなす角であるが，証明すべき内容は鋭角であるので，③の範囲内で次の場合わけが発生します。 [1] $\tan\gamma>0$ すなわち $0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$，[2] $\tan\gamma<0$ すなわち $\dfrac{\pi}{2}<\gamma<\pi$ [1] $0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\tan\theta=\tan\gamma=\dfrac{a-c}{1+ac}$ [2] $\dfrac{\pi}{2}<\gamma<\pi$ のとき $0<\pi-\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ であるから， $\tan\theta=\tan(\pi-\gamma)=-\tan\gamma=-\dfrac{a-c}{1+ac}$ [1]，[2]より， $\tan\theta=\left\|\dfrac{a-c}{1+ac}\right\|$ が成り立つことが示されました。
C54	点の原点回転
Q54	点 P(2，6)を原点 O を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた点 Q の座標$(x,\ y)$を求めよ。
A54	原点回転のときは加法定理を利用して解くことができます。 三角関数の問題では単位円(半径 1)で考えることが多いですが，点P(2，6)は単位円周上にはないので，半径 r を考える必要があることに注意しましょう。 $\mathrm{OP}=r$ とし，動径 OP と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると， 点 P$(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$となるから，$r\cos\alpha=2$，$r\sin\alpha=6$・・・①を満たす。 動径 OQ と x 軸との正の向きとのなす角は $\alpha+\dfrac{\pi}{4}$ であり，$\mathrm{OQ}=\mathrm{OP}=r$ より， $(x,\ y)=\left(r\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right),\ r\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ 余弦の加法定理 $r\cos(\alpha+\beta)=r\cos\alpha\cos\beta-r\sin\alpha\sin\beta$ より， $r\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=r\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}-r\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}$

	$= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ $= \sqrt{2} - 3\sqrt{2}$ $= -2\sqrt{2}$ 正弦の加法定理　$r\sin(\alpha+\beta) = r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\sin\beta$　より， $r\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = r\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + r\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}$ $= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ $= 4\sqrt{2}$ **答え　$\mathbf{Q}(x,\ \ y) = (-2\sqrt{2},\ \ 4\sqrt{2})$**
C55	点の一般回転
Q55	点 P(1,　7)を A(−1,　1)を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させた点 Q の座標を求めよ。
A55	加法定理を利用することにより，　原点を中心として回転させた点の座標を求めることができました。しかし，　原点でない点を中心に回転すると加法定理を利用することができません。そこで中心点を原点に平行移動することで，　原点回転の問題に帰着させることができます。 A　を原点に平行移動するとはすなわち，　x　軸正方向に　1，　y　軸正方向に　-1　平行移動するということである。 このとき，　点P(1,　7)　は　点P′(2,　6)　に移動します。 $\mathrm{OP}' = r$　とし，　動径 OP　と　x　軸の正の向きとのなす角を　α　とすると， 点P′$(r\cos\alpha,\ \ r\sin\alpha)$となるから，　$r\cos\alpha = 2$，　$r\sin\alpha = 6$・・・①を満たす。 動径 OQ′ と x 軸との正の向きとのなす角は $\alpha + \frac{\pi}{4}$ であり，　$\mathrm{OQ} = \mathrm{OP} = r$ より， $(x,\ \ y) = \left(r\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right),\ \ r\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 余弦の加法定理　$r\cos(\alpha+\beta) = r\cos\alpha\cos\beta - r\sin\alpha\sin\beta$　より， $r\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = r\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} - r\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}$ $= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ $= \sqrt{2} - 3\sqrt{2}$ $= -2\sqrt{2}$ 正弦の加法定理　$r\sin(\alpha+\beta) = r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\sin\beta$　より，

	$r\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=r\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+r\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}$ $=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+6\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ $=4\sqrt{2}$ よって，　点Q'$(-2\sqrt{2},\ \ 4\sqrt{2})$ 最後に，　平行移動をもとに戻して， **答え　Q$(-2\sqrt{2}-1,\ \ 4\sqrt{2}+1)$**
C56	三角関数の 2 倍角の値
Q56	$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi,\quad \cos\theta=\frac{3}{5}$ のとき，　$\sin 2\theta$，　$\cos 2\theta$，　$\tan 2\theta$ の値をそれぞれ求めよ。
A56	$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ であるから，　$\sin\theta<0,\quad \tan\theta<0$・・・① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，　①と合わせて，　$\sin\theta=-\frac{4}{5}$ $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，　①と合わせて　$\tan\theta=-\frac{4}{3}$ $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ より，　$\sin 2\theta=2\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{3}{5}=-\frac{24}{25}$ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ より，　$\cos 2\theta=2\times\frac{9}{25}-1=-\frac{17}{25}$ $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2 2\alpha}$ より，　$\tan 2\theta=\frac{2\times(-\frac{4}{3})}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{24}{17}$ （ちなみに　$\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{24}{17}$ として計算しても良い。） **答え　$\sin 2\theta=-\frac{24}{25}$，　$\cos 2\theta=-\frac{17}{25}$，　$\tan 2\theta=\frac{24}{17}$**
C57	三角関数の半角の値
Q57	$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi,\quad \cos\theta=\frac{3}{5}$ のとき，　$\sin\frac{\theta}{2}$，　$\cos\frac{\theta}{2}$，　$\tan\frac{\theta}{2}$ の値をそれぞれ求めよ。
A57	$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ であるから，　$\frac{3}{4}\pi<\frac{\theta}{2}<\pi$

この範囲で，　$\sin\frac{\theta}{2} > 0$,　$\cos\frac{\theta}{2} < 0$,　$\tan\frac{\theta}{2} < 0$・・・①

半角の公式　$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$,　$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ より，

$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{3}{5}}{2} = \frac{1}{5}$,　①と合わせて，　$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\frac{3}{5}}{2} = \frac{4}{5}$,　①と合わせて，　$\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{-2\sqrt{5}}{5}} = -\frac{1}{2}$$

答え　$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,　$\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,　$\tan\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}$

C58

$t = \tan\frac{\theta}{2}$ の等式の証明

Q58

$t = \tan\frac{\theta}{2}$ のとき，　次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}\ (t \neq \pm 1)$$

A58

正接の 2 倍角の公式から，　まず $\tan\theta$ を t を用いて表すことができます。　$\tan\theta$ が分かれば，　$\cos\theta$,　$\sin\theta$ の順に求めることができます。ただし，　θ の範囲が明かされていないので，　$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ を用いて直接 $\cos\theta$ を計算しようとしても符号を調べるのは相当の手間がかかります。ですから，　余弦の 2 倍角を用いる方法が楽です。

正接の 2 倍角の公式　$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ を用いると，

$$\tan\theta = \tan\left(2\times\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2t}{1-t^2}$$

$1+\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$ から，　$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1+t^2}$

余弦の 2 倍角の公式　$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ より，

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

$$= \frac{2}{1+t^2} - 1$$

	$=\dfrac{2-1-t^2}{1+t^2}$ $=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin\theta=\cos\theta\tan\theta$ より， $\sin\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\times\dfrac{2t}{1-t^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$ (Q.E.D)
C59	2θ と θ の混合の三角方程式の解
Q59	$0\leqq\theta<2\pi$ のとき， 次の方程式を解け。 $\sin 2\theta=\cos\theta$
A59	角が 2θ と θ で異なっているので， 2 倍角の公式を使って， θ に統一します。 方程式なので因数分解をして， 求めていきます。 正弦の 2 倍角の公式　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ より， $2\sin\theta\cos\theta=\cos\theta$ $2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta=0$ $\cos\theta(2\sin\theta-1)=0$ これより， $\cos\theta=0$， $2\sin\theta-1=0$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき， $\cos\theta=0$ から $\theta=\dfrac{\pi}{2}$， $\dfrac{3}{2}\pi$ $0\leqq\theta<2\pi$ のとき， $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ から $\theta=\dfrac{\pi}{6}$， $\dfrac{5}{6}\pi$ **答え　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$， $\dfrac{\pi}{2}$， $\dfrac{5}{6}\pi$， $\dfrac{3}{2}\pi$**
C60	2θ と θ の混合の三角不等式の解
Q60	$0\leqq\theta<2\pi$ のとき， 次の不等式を解け。 $\sin 2\theta\geqq 2\sin\theta$
A60	2θ と θ が混合している三角不等式は， 2 倍角の公式を利用することで θ に統一することができます。あとは因数分解を行うことによって解くことができます。 なお， $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ であるから， $(-2\leqq)\cos\theta-1\leqq 0$ これは， $\cos\theta-1=0$ もしくは負であり， 正にはならないことを表します。 $\sin 2\theta-2\sin\theta\geqq 0$ $2\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta\geqq 0(\because \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta)$ $\sin\theta(\cos\theta-1)\geqq 0$ $0\leqq\theta<2\pi$・・・① のとき， $-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ であるから， $\cos\theta-1\leqq 0$ よって， $\sin\theta\leqq 0$， $\cos\theta-1=0$

	①の範囲で，　$\sin\theta \leqq 0$ を解くと，　$\theta = 0$,　$\pi \leqq \theta < 2\pi$ ①の範囲で，　$\cos\theta = 1$ を解くと，　$\theta = 0$ **答え　$\theta = 0$,　$\pi \leqq \theta < 2\pi$**
C61	三角関数の 3 倍角の証明
Q61	$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$,　$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ と加法定理を用いて， $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$,　$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ が成り立つことを証明せよ。
A61	$\sin 3\theta$ の証明には，　$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ を，　$\cos 3\theta$ の証明には， $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を用いて計算していきます。 $\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta)$ $= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta$ (∵ 加法定理) $= 2(\sin\theta\cos\theta)\cos\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta$ (∵ 2 倍角の公式) $= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta$ $= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta$ (Q.E.D) $\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$ $= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$ (∵ 加法定理) $= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2(\sin\theta\cos\theta)\sin\theta$ (∵ 2 倍角の公式) $= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$ $= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta$ (∵ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$) $= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ (Q.E.D)
C62	三角関数の 3 倍角の値
Q62	$\sin\theta = \frac{1}{4}$ のとき，　$\sin 3\theta$ の値を求めよ。
A62	$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ を用いて計算を行います。 $\sin 3\theta = 3 \times \frac{1}{4} - 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{11}{16}$ **答え　$\sin 3\theta = \frac{11}{16}$**
C63	$\frac{\pi}{5}$ の整数倍の角の三角関数の等式の証明
Q63	$\theta = \frac{2}{5}\pi$ のとき，　$\sin 3\theta + \sin 2\theta = 0$ が成り立つことを証明せよ。
A63	2 つの角 α,　β において，　$\alpha = \beta \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$ が成り立つことを利用します。

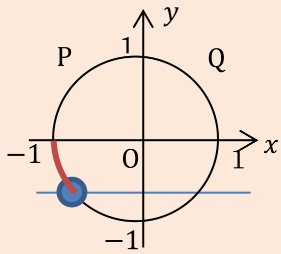
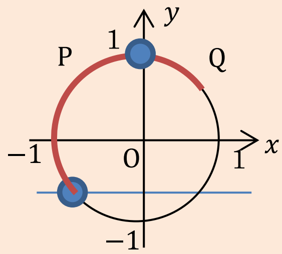
	$\theta = \frac{2}{5}\pi$ の条件を使って， 3θ と 2θ が出てくるように式変形していきます。 $\theta = \frac{2}{5}\pi$ であるから， $5\theta = 2\pi$ 　すなわち， $3\theta + 2\theta = 2\pi$ であるから， $3\theta = -2\theta + 2\pi$ が成り立つ。よって， $\sin 3\theta = \sin(-2\theta + 2\pi)$・・・① が成り立ちます。 また， $\sin(-2\theta + 2\pi) = \sin(-2\theta) = -\sin 2\theta$・・・② ①，②より， $\sin 3\theta = -\sin 2\theta$ 移項をして， $\sin 3\theta + \sin 2\theta = 0$ (Q.E.D)
C64	$\frac{\pi}{5}$ の整数倍の角の三角関数の値
Q64	$\theta = \frac{2}{5}\pi$ のとき， 等式 $\sin 3\theta + \sin 2\theta = 0$ を利用して， $\cos\theta$ の値を求めよ。
A64	3 倍角の公式 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ と 2 倍角の公式 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ を用いて， $\cos\theta$ に関する式をつくります。 最初に θ の範囲から， $\sin\theta > 0$， $\cos\theta > 0$・・・①がわかります。 $\sin 3\theta + \sin 2\theta = 0$ より， $3\sin\theta - 4\sin^3\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 0$ 全ての項に $\sin\theta$ があるので共通因数をくくります。 $\sin\theta\,(3 - 4\sin^2\theta + 2\cos\theta) = 0$ ①より， $\sin\theta \neq 0$ であるから， $3 - 4\sin^2\theta + 2\cos\theta = 0$ $3 - 4(1 - \cos^2\theta) + 2\cos\theta = 0$ より， $4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0$ これを解くと， $\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ ①と合わせて， $\cos\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ **答え** $\boldsymbol{\cos\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}}$
C65	三角関数の積→和
Q65	$\sin 75^\circ \cos 45^\circ$ の値を求めよ。
A65	三角関数の積 → 和の公式 $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$ より， $\sin 75^\circ \cos 45^\circ = \frac{1}{2}(\sin 120^\circ + \sin 30^\circ)$

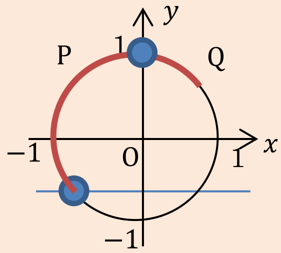
	$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$ $=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ **答え** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}+1}{4}}$
C66	三角関数の和→積
Q66	$\sin 75^\circ - \sin 45^\circ$ の値を求めよ。
A66	三角関数の和 → 積の公式　$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ より， $\sin 75^\circ - \sin 45^\circ = 2\cos 120^\circ \sin 30^\circ = 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **答え** $\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$
C67	三角形の内角の三角関数の証明問題
Q67	△ABC において，次の等式が成り立つことを証明せよ。 $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ ・・・①
A67	一般の角ではなく，三角形の内角であるので，三角形の内角の和が 180°であることを利用します。すなわち，$A+B+C=\pi$・・・② これより，A，B，C の 3 変数から $C=\pi-(A+B)$ とすることで，A，B の 2 変数にすることで計算しやすくなります。 加法定理より，$\sin C = \sin(\pi-(A+B))$ $= \sin\pi\cos(A+B) - \sin(A+B)\cos\pi$ $= \sin(A+B)$ $\cos\frac{C}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{2}\right)$ $= \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{A+B}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{A+B}{2}$ $= \sin\frac{A+B}{2}$ よって，①を変形した， $\sin A + \sin B + \sin(A+B) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2}$ ・・・②を証明すればよい。

	和 → 積の公式　$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ より， $(\text{左辺}) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B)$ $= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin\left(2\times\frac{A+B}{2}\right)$ (半角の形に変形) $= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$ ($\because$ 正弦の 2 倍角) $= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right)$ $\left(\sin\frac{A+B}{2}\right.$ でくくった$\left.\right)$ 和 → 積の公式 $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ より， $(\text{左辺}) = 2\sin\frac{A+B}{2} \times 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{-B}{2}$ $(\text{左辺}) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{2}$ ($\because \cos(-\theta) = \cos\theta$) $= (\text{右辺})$ よって，②が示されたから，①が示されました。
C68	三角方程式の解法
Q68	$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，次の方程式を解け。 $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$
A68	和 → 積の公式　$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ を利用して解きます。 $\sin\theta + \sin 2\theta$ に和→積を使ってもできますが，分数が出てくると計算が大変になるので，$\sin\theta + \sin 3\theta$ を計算していきます。大きい方を最初に持ってきて， $\sin 3\theta + \sin\theta = 2\sin\frac{3\theta+\theta}{2}\cos\frac{3\theta-\theta}{2} = 2\sin 2\theta\cos\theta$ よって，$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 2\sin 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta$ $= \sin 2\theta\,(2\cos\theta + 1)$ であるから， 求めるのは，$\sin 2\theta\,(2\cos\theta + 1) = 0$ の解である。 これを解くと，$\sin 2\theta = 0$，$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ $0 \leqq \theta \leqq \pi$・・・① のとき，$0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$・・・② ②の範囲のもと，$\sin 2\theta = 0$ を解くと，$2\theta = 0$，π，2π すなわち，$\theta = 0$，$\frac{\pi}{2}$，π・・・③

	①の範囲のもと $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ を解くと， $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$・・・④ ③と④より， 求める解は以下のとおりである。 **答え　$\theta = 0,\ \ \dfrac{2}{3}\pi,\ \ \pi,\ \ 2\pi$**
C69	三角関数の sin 合成(角 α が具体的なとき)
Q69	次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし， $r>0$， $-\pi<\alpha\leqq\pi$ とする。 $\sin\theta+\cos\theta$
A69	三角関数の合成　$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$ ただし， $r=\sqrt{a^2+b^2}$ であり， P(a, b) と x 軸の正の向きとのなす角が α である。 $\sin\theta+\cos\theta = 1\cdot\sin\theta + 1\cdot\cos\theta$ であるから， $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ 点(1, 1) と x 軸の正の向きとのなす角は$\dfrac{\pi}{4}$ であるから， **答え　$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$**
C70	三角関数の sin 合成(角 α が具体的でないとき)
Q70	次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形せよ。ただし， $r>0$， $-\pi<\alpha\leqq\pi$ とする。 $\sin\theta+3\cos\theta$
A70	三角関数の合成　$a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$ ただし， $r=\sqrt{a^2+b^2}$ であり， P(a, b) と x 軸の正の向きとのなす角が α である。 $\sin\theta+3\cos\theta = 1\cdot\sin\theta + 3\cdot\cos\theta$ であるから， $r=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ ここで， 点 P(1, 3) と x 軸の正の向きとのなす角は有名角ではないので， 具体的に表すことができません。 そこで代わりに角 α で表していきます。 ただし， 角 α のままだと点(1, 3) と x 軸の正の向きとのなす角を表せないので， これがわかるように， 条件を書き込んでいきます。 具体的にどうするかというと， $\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ の値が確定すれば角 α の動径が決まるので， これらを明示していきます。 $\sin\alpha = \dfrac{y}{r} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ $\cos\alpha = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

	答え　$\boldsymbol{\sin\theta + 3\cos\theta = \sqrt{10}\sin(\theta+\alpha)}$ ただし，$\boldsymbol{\alpha}$ は　$\boldsymbol{\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}}$， $\boldsymbol{\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{10}}$ を満たす角である。
C71	三角関数の cos 合成
Q71	次の式を $r\cos(\theta+\alpha)$ の形に変形せよただし，$r>0$，$-\pi<\alpha\leqq\pi$ とする。 $\sin\theta+\cos\theta$
A71	サイン合成はよく使いますが，コサイン合成はあまり使いません。ですから， 余弦の加法定理より　$r\cos(\theta+\alpha) = r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha$から逆の操作を行うことにより今回は求めていきます。 加法定理と $\sin\theta+\cos\theta$ を比較して， $-r\sin\alpha = 1$，$r\cos\alpha = 1$　すなわち　$\sin\alpha = -\dfrac{1}{r}$，$\cos\alpha = \dfrac{1}{r}$ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ より，$\left(-\dfrac{1}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\right)^2 = 1$ から，$r = \sqrt{2}(\because r>0)$ よって，$\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ これを満たす角 α は，$-\pi<\alpha\leqq\pi$ に注意して，$\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$ 答え　$\boldsymbol{\sin\theta+\cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)}$
C72	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 1 次式の三角方程式の解
Q72	$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解きなさい。 $\sin\theta+\cos\theta+1=0$
A72	$\sin\theta+\cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから， $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $0\leqq\theta<2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ であるから，$\theta+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$ よって，$\theta=\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$ 答え　$\boldsymbol{\theta=\pi}$，$\boldsymbol{\dfrac{3}{2}\pi}$
C73	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 1 次式の三角不等式の解
Q73	$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，次の不等式を解け。

	$\sin\theta + \cos\theta < 0$
A73	三角関数の合成より， $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ $\sqrt{2} > 0$ で割ると， よって，　与式は，　$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) < 0$・・・① $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，　$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$・・・② ②の範囲で①を解くと， $\pi \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$　よって，　$\frac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \pi$ **答え　$\frac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \pi$** 
C74	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 1 次式の三角関数の最大・最小
Q74	次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，　そのときの θ の値を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。 $y = \sin\theta + \cos\theta$
A74	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 1 次式の三角関数の最大・最小は三角関数の合成を利用することで，　1 種類のみの三角関数で表すことができるので，　単位円を用いて最大・最小を考えることができます。 $y = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$・・・① $0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，　$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$・・・② ②の範囲のもと，　①を解くと， $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{2}\cdot 1$ をとる。 すなわち，　$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとる $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$ のとき最小値 $\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$ をとる。 $\theta = \pi$ のとき最小値 -1 をとる。 **答え　$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}$，　$\theta = \pi$ のとき最小値 -1** 
C75	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 1 次式の三角関数の最大・最小

Q75	次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。 $$y=\sin\theta+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$
A75	角が θ と $\theta+\frac{\pi}{6}$ で異なっているので，このままだと都合がよくありません。 そこで，余弦の加法定理 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ を用いて，θ のみの三角関数に直していきます。 $y=\sin\theta+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ $=\sin\theta+\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}$ $=\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta$ $=\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$ $=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ ・・・①  $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき $\frac{\pi}{3} \leqq \theta+\frac{\pi}{3} \leqq \frac{4}{3}\pi$ ・・・② ②の範囲で①は， $\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ すなわち，$\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき 最大値 1 をとる。 $\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$ すなわち，$\theta=\pi$ のとき 最小値 $\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。 **答え $\theta=\frac{\pi}{6}$ のとき 最大値 1，$\theta=\pi$ のとき 最小値 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$**
C76	$t=\sin\theta+\cos\theta$ を利用した三角関数の最大・最小
Q76	関数 $f(\theta)=4\sin\theta\cos\theta+4(\sin\theta+\cos\theta)+1$ を考える。ただし，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする。 $f(\theta)$ の最大値と最小値を求め，そのときの θ の値を求めよ。
A76	$f(\theta)$ は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式であるから，基本対称式 $\sin\theta+\cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ を用いて表すことができます。 基本対称式の値が両方ともわからないので，ここでは，$\sin\theta+\cos\theta=t$ ・・・①と文字でおいておきます。 すると，①を 2 乗すると，$\sin\theta\cos\theta$ の項が出てくるので，これも t を用いて

表すことができます。

置き換えした際に，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$・・・② の範囲があるので，$t$ についても範囲を求めていきます。

$t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$・・・③(∵ 三角関数の合成)

①より，$0 + \frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq 2\pi + \frac{\pi}{4}$　よって，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{9}{4}\pi$・・・④

④の範囲のもと，③は,

$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ すなわち，$\theta = \frac{\pi}{4}$ のときに最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$ すなわち，$\theta = \frac{5}{4}\pi$ のときに最大値 $-\sqrt{2}$ をとる。

よって，t の範囲は $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$・・・⑤

①を 2 乗すると，$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = t^2$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いると,

$2\sin\theta\cos\theta = t^2 - 1$

これより,

$$f(\theta) = 2(t^2 - 1) + 4t + 1$$
$$= 2t^2 + 4t - 1$$
$$= 2(t + 1)^2 - 3$$

⑤の範囲のもと，$f(\theta)$ は,

$t = \sqrt{2}$ のとき，最大値 $4\sqrt{2} + 3$ をとる。

$t = -1$ のとき，最小値 -3 をとる。

最大値と最小値は分かったが求めるのは t の値ではなく，θ の値なので，③を使って求めていきます。

$t = \sqrt{2}$ のとき，$\theta = \frac{\pi}{4}$

$t = -1$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -1$　すなわち，$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

を解くと，$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

よって，$\theta = \pi,\ \frac{3}{2}\pi$

答え　$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $4\sqrt{2} + 3$，$\theta = \pi$，$\frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -3

C77	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の 2 次同次式
Q77	$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，関数 $y = \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta$ の最大値と最小値を求めよ。
A77	$\sin\theta$，$\cos\theta$ を含む項の次数がすべて同じである式を，同次式といいます。 2 次の同次式においては，2θ の角に統一するとうまくいきます。 2 倍角の公式を変形した，$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2}$ と， 半角の公式 $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ を用いると， $y = \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta$ $= \dfrac{\sin 2\theta}{2} + \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ $= \dfrac{1}{2}\sin\left(2\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{2}$ ($\because$ 三角関数の合成) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$-\dfrac{\pi}{4} \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ であるから， $2\theta - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ すなわち，$\theta = \dfrac{3}{8}\pi$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$ をとる。 $2\theta - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4}$ すなわち，$\theta = 0$ のとき，最小値 $\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{1}{2}$ をとる。 **答え $\boldsymbol{\theta = \dfrac{3}{8}\pi}$ のとき，最大値 1，$\boldsymbol{= 0}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}}$**
C78	2 次同次式の最大・最小(単位円を利用)
Q78	実数 x，y が $x^2 + y^2 = 1$ を満たすとき，$x^2 + 2xy + 3y^2$ の最大値と最小値を求めよ。
A78	一見すると三角関数の問題ではありませんが，x，y は $x^2 + y^2 = 1$ を満たすので，$x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくことで三角関数の問題に帰着することができます。すると，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の 2 次同次式であるから 2θ に統一していきます。なお，特に指示がない場合は，最大値，最小値をもつような x，y の値は明示するべきである。 $x^2 + 2xy + 3y^2 = \cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + 3\sin^2\theta$ $= 1 + \sin 2\theta + 2\sin^2\theta$ ($\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$) $= 1 + \sin 2\theta + 1 - \cos 2\theta \left(\because \sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}\right)$

$$= \sin\left(2\theta - \frac{7}{4}\pi\right) + 2 \ (\because \text{三角関数の合成})$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき,　$-\frac{7}{4}\pi \leqq 2\theta - \frac{7}{4}\pi \leqq \frac{9\pi}{4}$

$2\theta - \frac{7}{4}\pi = -\frac{3}{2}\pi,\quad \frac{\pi}{2}$ すなわち,　$\theta = \frac{\pi}{8},\quad \frac{9}{8}\pi$ のとき,

最大値 $1 + 2$ をとる。

$2\theta - \frac{7}{4}\pi = -\frac{1}{2}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi$ すなわち,　$\theta = \frac{5}{8}\pi\ ,\frac{13}{8}\pi$ のとき,

最小値 $-1 + 2$ をとる。

半角の公式　$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2},\quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ より,

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\frac{\pi}{8} > 0$ より,　$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\frac{\pi}{8} > 0$ より,　$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta,\quad \cos(\theta+\pi) = \cos\theta$　より,

$\sin\frac{9}{8}\pi = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\quad \cos\frac{9}{8}\pi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta,\quad \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$　より,

$\sin\frac{5}{8}\pi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad \cos\frac{5}{8}\pi = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta,\quad \cos(\theta+\pi) = \cos\theta$　より

$\sin\frac{13}{8}\pi = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\quad \cos\frac{13}{8}\pi = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

よって,

$(x,\ y) = \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$ **のとき最大値3**

$(x,\ y) = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$ **のとき最小値1**

C79	図形への応用

Q79	半径 1 の円に内接し，　$\mathrm{A}=\frac{\pi}{6}$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ について，　3 辺の長さの和 $\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}$ の最大値を求めよ。
A79	単位円を外接円とする三角形において，辺の長さを考えるので，正弦定理を考えるとうまくいきそうです。角 A，B，C は三角形の内角であるので， $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=\pi$ を満たします。 $\sin C=\sin(\pi-A-B)=\sin(-A-B)=\sin(A+B)$ であることと， $A=\frac{\pi}{6}$ であることから，B についての 1 変数を考えていきます。 正弦定理　$2\mathrm{R}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ より， $\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}=2\cdot 1(\sin A+\sin B+\sin C)$ $=2(\sin A+\sin B+\sin(\pi-A-B))$ $=2(\sin A+\sin B+\sin(A+B))$ $=2\left(\sin\frac{\pi}{3}+\sin B+\sin\left(\frac{\pi}{3}+B\right)\right)$ $=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin B+\sin\frac{\pi}{3}\cos B+\cos\frac{\pi}{3}\sin B\right)$ $=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)$ $=2\left(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $=3\sin B+\sqrt{3}\cos B+\sqrt{3}$ $=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$ $0<B<\frac{5}{6}\pi$ より，$B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，　すなわち，$B=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値をとる。 **答え　$A=\frac{\pi}{6}$，$B=\frac{\pi}{3}$，$C=\frac{\pi}{2}$ のとき，最大値　$3\sqrt{3}$**