C21	分数型の漸化式(等比数列利用型)
Q21	$a_1=1,\quad a_{n+1}=\dfrac{a_n+4}{a_n+1}$ ・・・① で定められている数列 $\{a_n\}$ において，　$b_n=\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}(\alpha>\beta)$ とおく。 数列 $\{b_n\}$ が等比数列となるような実数 $\alpha,\quad \beta$ の値を求めよ。
A21	条件にしたがって式変形をしていきます。 $b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}$ $=\dfrac{\dfrac{a_n+4}{a_n+1}-\beta}{\dfrac{a_n+4}{a_n+1}-\alpha}$ $=\dfrac{a_n+4-\beta(a_n+1)}{a_n+4-\alpha(a_n+1)}$ $=\dfrac{(1-\beta)a_n+4-\beta}{(1-\alpha)a_n+4-\alpha}$ $=\dfrac{(1-\beta)\left(a_n+\dfrac{4-\beta}{1-\beta}\right)}{(1-\alpha)\left(a_n+\dfrac{4-\alpha}{1-\alpha}\right)}$ $=\dfrac{1-\beta}{1-\alpha}\cdot\dfrac{a_n+\dfrac{4-\beta}{1-\beta}}{a_n+\dfrac{4-\alpha}{1-\alpha}}$ ・・・② 数列 $\{b_n\}$ が等比数列となるための条件は, $\dfrac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=r\cdot\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ ・・・③ となる実数 $r(r\neq 0)$が存在することである。 ②の左辺と比較して，　$\dfrac{4-\beta}{1-\beta}=-\beta,\quad \dfrac{4-\alpha}{1-\alpha}=-\alpha$ ・・・④

	④は，$\dfrac{4+x}{1+x}=x$ の解が $-\alpha,\ -\beta$ であることを意味している。 これを変形すると，$x^2-4=0$　よって，$x=\pm 2$ であるから， $\alpha>\beta$ より，$-\alpha<-\beta$ であるから， $(-\alpha,\ -\beta)=(-2,\ 2)$ よって，$(\alpha,\ \beta)=(2,\ -2)$　このとき， $r=\dfrac{1-\beta}{1-\alpha}=\dfrac{3}{-1}=-3\neq 0$ より満たす。 **答え　$(\alpha,\ \beta)=(2,\ -2)$**