C17	隣接 3 項間の漸化式(解が重解)
Q17	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1 = 1,\quad a_2 = 4,\quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
A17	隣接 3 項間の漸化式は，まず特性方程式 $x^2 - 4x + 4 = 0$ の解を求めます。 今回は，$x = 2$(重解) となっているので， $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$ の 1 つの式しか出てきません。 この等比数列を計算すると，$a_{n+1} = pa_n + qr^n$ 型の漸化式が出てくるので，r^{n+1} で割ることによって求めることができます。 漸化式を変形すると， $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$ 数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = 2$，公比 2 の等比数列であるから， $a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \therefore a_{n+1} - 2a_n = 2^n$・・・① ①の両辺を$2^{n+1}$で割ると， $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{2a_n}{2 \cdot 2^n} = \frac{2^n}{2 \cdot 2^n}$ $\frac{a_n}{2^n} = b_n$・・・② とおくと，$b_1 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}$

$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2}$

数列 $\{b_n\}$は初項 $\frac{1}{2}$，　公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列であるから，

$b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}n$

②より，　$a_n = \frac{1}{2}n \cdot 2^n$

答え　一般項　$a_n = \frac{1}{2}n \cdot 2^n (n = 1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots)$