

C14	隣接 3 項間の特性方程式
Q14	<p>$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 (pq \neq 0) \cdots \textcircled{1}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ において, $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \cdots \textcircled{2}$ を満たす実数 α, β は x の 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解であることを示せ。</p>
A14	<p>一般に, $\textcircled{1}$ の a_{n+2}, a_{n+1}, a_n を $x^2, x, 1$ と置き換えた 2 次方程式</p> <p>$x^2 + px + q = 0$ を特性方程式といいます。</p> <p>特性方程式の解を α, β とおくと, $\textcircled{2}$ のように $\textcircled{1}$ を変形することができます。</p> $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n),$ $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ <p>$\textcircled{2}$ を変形すると, $a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$</p> <p>これと, $\textcircled{1}$ を比較すると, $\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q \cdots \textcircled{3}$</p> <p>2 次方程式の解と係数の関係より, α, β を解にもつ 2 次方程式の 1 つは,</p> <p>$x^2 + px + q = 0$ である。(Q.E.D)</p>