

C14	隣接 3 項間の特性方程式
Q14	<p><math>a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0 (pq \neq 0) \cdots \textcircled{1}</math> で定められる数列 <math>\{a_n\}</math> において, <math>a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \cdots \textcircled{2}</math> を満たす実数 <math>\alpha, \beta</math> は <math>x</math> の 2 次方程式 <math>x^2 + px + q = 0</math> の解であることを示せ。</p>
A14	<p>一般に, <math>\textcircled{1}</math> の <math>a_{n+2}, a_{n+1}, a_n</math> を <math>x^2, x, 1</math> と置き換えた 2 次方程式 <math>x^2 + px + q = 0</math> を特性方程式といいます。</p> <p>特性方程式の解を <math>\alpha, \beta</math> とおくと, <math>\textcircled{2}</math> のように <math>\textcircled{1}</math> を変形することができます。</p> $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n),$ $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ <p><math>\textcircled{2}</math> を変形すると, <math>a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0</math></p> <p>これと, <math>\textcircled{1}</math> を比較すると, <math>\alpha + \beta = -p, \alpha\beta = q \cdots \textcircled{3}</math></p> <p>2 次方程式の解と係数の関係より, <math>\alpha, \beta</math> を解にもつ 2 次方程式の 1 つは,</p> $x^2 + px + q = 0 \text{ である。 (Q.E.D)}$