		チェック日
C1	等差数列の漸化式	
C2	等比数列の漸化式	
C3	階差数列の漸化式	
C4	$a_{n+1} = pa_n + q$ 型の漸化式の特殊解	
C5	$a_{n+1} = pa_n + q$ 型の漸化式	
C6	$a_{n+1} = pa_n + qn + r$ 型の漸化式	
C7	$a_{n+1} = pa_n + qn + r$ 型の漸化式(等比誘導型)	
C8	$a_{n+1} = pa_n + qn^2 + rn + s$ 型の漸化式	
C9	$a_{n+1} = pa_n + rq^n$ 型の漸化式	
C10	$a_{n+1} = \frac{ra_n}{pa_n + q}$ 型の漸化式	
C11	$a_{n+1} = pa_n^q$ 型の漸化式	
C12	$(n+p)a_{n+1} = (n+q)a_n + r(p < q)$ 型の漸化式	
C13	$(n+p)a_{n+1} = (n+q)a_n + r(p > q)$ 型の漸化式	
C14	隣接 3 項間の特性方程式	
C15	隣接 3 項間の漸化式(解が 1，α)	
C16	隣接 3 項間の漸化式(解が α，β)	
C17	隣接 3 項間の漸化式(解が重解)	
C18	連立漸化式(一般)	
C19	連立漸化式(特殊)	
C20	分数型の漸化式(等差数列利用型)	
C21	分数型の漸化式(等比数列利用型)	

C1	等差数列の漸化式
Q1	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 2$
A1	等差数列の定義 数列 $\{a_n\}$ が等差数列であるとは，任意の n に対して隣り合う 2 項の差 $a_{n+1} - a_n$ が一定の値 d をとることである。 これより，$a_{n+1} - a_n = d\ (a_{n+1} = a_n + d)$ の形は，等差数列です。 $a_{n+1} = a_n + 2$ から，$a_{n+1} - a_n = 2$ これは数列 $\{a_n\}$ が公差 2 の等差数列であることを表しています。 初項は，$a_1 = 2$ であるから， **答え $\boldsymbol{a_n = 2 + 2(n-1) = 2n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)}$**
C2	等比数列の漸化式
Q2	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = -2a_n$
A2	等比数列の定義 数列 $\{a_n\}$ が等比数列であるとは，任意の n に対して隣り合う 2 項の商 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ が一定の値 r をとることである。 これより，$a_{n+1} = ra_n$ の形をとるので等比数列である。 $a_{n+1} = -2a_n$ は，初項 $a_1 = 2$，公比-2 の等比数列である。 $\therefore a_n = 2\cdot(-2)^{n-1} (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ **答え $\boldsymbol{a_n = 2\cdot(-2)^{n-1} (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)}$**
C3	階差数列の漸化式
Q3	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 2^n + n$
A3	a_n の係数が 1 のときには，階差数列を使うと便利です。シグマの計算で出てきた公式も思い出していきましょう。 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1},\quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ $a_{n+1} - a_n = 2^n + n$ 数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $2^n + n$ であるから， $n \geqq 2$ のとき，

	$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2^k + k)$ $= 2 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} + \frac{1}{2}(n-1)\cdot n$ $= 2 + 2^n - 2 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ $= 2^n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ **答え　$a_n = 2^n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$**
C4	$a_{n+1} = pa_n + q$ 型の漸化式の特殊解
Q4	$a_1 = 2,\ \ a_{n+1} = 3a_n + 2$・・・① によって定められる数列 $\{a_n\}$ において， $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$・・・② を満たす定数 $p,\ \ \alpha$ を求めよ。
A4	②を式変形すると， $a_{n+1} = pa_n + (1-p)\alpha$ ①と比較すると， $p = 3,\ \ (1-p)\alpha = 2$ これより， $p = 3,\ \ \alpha = -1$ **答え　$p = 3,\ \ \alpha = -1$**
C5	$a_{n+1} = pa_n + q$ 型の漸化式
Q5	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1 = 2,\ \ a_{n+1} = 3a_n + 2$
A5	$a_{n+1} = pa_n + q$ の $a_{n+1},\ \ a_n$ の代わりに α とおいた式 $\alpha = p\alpha + q$・・・① を用いることによって， $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と等比数列の形に変形することができます。 なお， 便宜上①を特性方程式と呼ぶ参考書もありますが， 本来は 隣接 3 項間の漸化式 $a_{n+2} + pa_{n+1} + q_n = 0$ の $a_{n+2} = x^2,\ \ a_{n+1} = x,\ \ a_n = 1$ とおいた，$x^2 + px + q = 0$ のことを指します。ですから， 特性方程式という言葉はむやみに用いずに， 変形した式のみを記述しましょう。 漸化式を変形すると， $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$ $b_n = a_n + 1$・・・① とおくと， $b_1 = a_1 + 1 = 3,\ \ b_{n+1} = 3b_n$ よって， 数列 $\{b_n\}$ は初項 3， 公比 3 の等比数列であるから， $b_n = 3\cdot 3^{n-1} = 3^n$ ①より， $a_n = b_n - 1 = 3^n - 1$ **答え　$a_n = 3^n - 1 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$**
C6	$a_{n+1} = pa_n + qn + r$ 型の漸化式

Q6	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1=1,\quad a_{n+1}=3a_n+2n-2$
A6	$a_{n+1}=3a_n+2n-2$・・・①の n を $n+1$ に置き換えた式は, $a_{n+2}=3a_{n+1}+2(n+1)-2$・・・② ②−①より, $a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+2$・・・③ $a_{n+1}-a_n=b_n$・・・③ とおくと, $b_1=a_2-a_1=(3a_1+2\cdot1-2)-1=2$, $b_{n+1}=3b_n+2$ これを変形すると, $b_{n+1}+1=3(b_n+1)$ よって, 数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=3$, 公比 3 の等比数列であるから, $b_n+1=3\cdot3^{n-1}=3^n$ よって, $b_n=3^n-1$ ③より, $a_{n+1}-a_n=3^n-1$ 数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が 3^n-1 であるから, $n\geqq2$ のとき, $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3^n-1)$ $=1+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-(n-1)$ $=\frac{1}{2}\cdot3^n-n+\frac{1}{2}$ **答え 一般項 $a_n=\frac{1}{2}\cdot3^n-n+\frac{1}{2}\,(n=1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots)$**
C7	$a_{n+1}=pa_n+qn+r$ 型の漸化式(等比誘導型)
Q7	$a_1=2,\quad a_{n+1}=3a_n+2n+3$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ において, $a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=p\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$ を満たす実数 p, α, β を求めよ。
A7	この問題を解くだけであれば, 係数比較法により, 実数はすぐに決定できます。 $a_{n+1}=pa_n+qn+r$ は階差数列を使って解くのが有名ですが, この問題のように, $b_n=a_n-(\alpha n+\beta)$ とおいて等差数列を使って解くことも可能です。共通テストや 2 次試験でもこのような誘導のもと, 等差数列に帰着させて解答させる問題もあります。また, この考え方は, $a_{n+1}=pa_n+qn^2+rn+s$ のように, a_n を含まない項が n の 2 次式でも有効であるので, この問題をしっかりおさえていきましょう。 $a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=p\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$ を整理すると, $a_{n+1}=pa_n+\alpha(1-p)n+(1-p)\beta$

	これと，$a_{n+1}=3a_n+2n+3$ を比較すると，a_n，n，定数項の係数から， $p=3$，$\alpha(1-p)=2$，$(1-p)\beta=3$ がそれぞれ得られます。 すなわち，$p=3$，$-2\alpha=2$，$2\beta=3$ から， **答え　$p=3$，$\alpha=-1$，$\beta=\dfrac{3}{2}$**
C8	$a_{n+1}=pa_n+qn^2+rn+s$ 型の漸化式
Q8	$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n^2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ において， $a_{n+1}-f(n+1)=2\{a_n-f(n)\}$・・・① を満たす x の 2 次の整式 $f(x)$ が存在することを示し，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
A8	$f(x)=px^2+qx+r(p\neq 0)$ とおいて，係数を比較することによって解いていきます。 ①を変形すると， $a_{n+1}=2a_n+f(n+1)-2f(n)$ ここで， $f(n+1)-2f(n)=p(n+1)^2+q(n+1)+r-2(pn^2+qn+r)$ $=pn^2+2pn+p+qn+q+r-2pn^2-2qn-2r$ $=-pn^2+(2p-q)n+p+q-r$ よって，$a_{n+1}=2a_n-pn^2+(2p-q)n+p+q-r$ $a_{n+1}=2a_n+n^2$ と比較して， $-p=1$，$2p-q=0$，$p+q-r=0$ 順々に，$p=-1$，$q=-2$，$r=-3$ と求まるから， $f(x)=-x^2-2x-3$ とおくと，これは①を満たす。 $b_n=a_n-f(n)$ とおくと，$b_1=a_1-f(1)=7$であり，$b_{n+1}=2b_n$ 数列 $\{b_n\}$ は初項 7，公比 2 の等比数列であるから， $b_n=7\cdot 2^{n-1}$　これより，$a_n-f(n)=7\cdot 2^{n-1}$ よって，$a_n=f(n)+7\cdot 2^{n-1}=-n^2-2n-3+7\cdot 2^{n-1}$ **答え　$a_n=-n^2-2n-3+7\cdot 2^{n-1}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$**
C9	$a_{n+1}=pa_n+rq^n$ 型の漸化式
Q9	次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1=4$，$a_{n+1}=6a_n+2^{n+2}$
A9	$a_{n+1}=6a_n+2^{n+2}$ → $b_{n+1}=pb_n+q$ となるような b_n が見つかればいいなと思うわけです。比較してみると，2^{n+2} が定数になれば良い。 引き算で消そうと思っても適切な b_n が見つかりません。そこで，試しに 2^{n+2} で割ってみます。 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+2}}=\dfrac{6a_n}{2^{n+2}}+\dfrac{2^{n+2}}{2^{n+2}}$　←　分母と分子の n が一致していないので揃えます。

	ここで，　$2^{n+2}=2\cdot 2^{n+1}$，　$2^{n+2}=2^2\cdot 2^n$　であるから， $\frac{1}{2}\cdot\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{6}{4}\cdot\frac{a_n}{2^n}+1$　←　b_{n+1} にあたる部分の係数が 1 になるように 2 をかける よって，　$a_{n+1}=pa_n+rq^n$型の漸化式においては，　q^{n+1}　で割ればよい。 $a_{n+1}=6a_n+2^{n+2}$　の両辺を　2^{n+1}　で割ると， $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{6a_n}{2^{n+1}}+\frac{2^{n+2}}{2^{n+1}}$　すなわち，　$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{6}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+2(\because 2^{n+2}=2^{n+1}\cdot 2)$ $b_n=\frac{a_n}{2^n}$　・・・①とおくと，　$b_1=2$，　$b_{n+1}=3b_n+2$ よって，　$b_{n+1}+1=3(b_n+1)$ 数列 $\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=3$，　公比 3 の等比数列であるから， $b_n+1=3\cdot 3^{n-1}$　　$\therefore b_n=3^n-1$ ①より，　$a_n=(2\cdot 3)^n-2^n=6^n-2^n$ **答え　一般項 $a_n=6^n-2^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$**
C10	$a_{n+1}=\frac{ra_n}{pa_n+q}$　型の漸化式
Q10	$a_1=\frac{1}{2}$，　$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
A10	$a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n+2}$　・・・①において， $a_1\neq 0$　と漸化式の形から，　$a_n\neq 0(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ よって，　①の逆数をとると $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n}{a_n}-\frac{2}{a_n}=1-\frac{2}{a_n}$ $b_n=\frac{1}{a_n}$　とおくと，　$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}}$，　$b_1=\frac{1}{a_1}=2$ $b_{n+1}=2b_n+1$ $b_{n+1}+2=2(b_n+1)$ 数列　$\{b_n\}$　は初項 2，　公比 2 の等比数列であるから， $b_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$　　よって，　$b_n=2^n-1$ $\therefore a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2^n-1}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ **答え　$a_n=\frac{1}{2^n-1}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$**
C11	$a_{n+1}=pa_n^q$　型の漸化式

Q11	$a_1=4,\quad a_{n+1}=2a_n^2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
A11	初見で解くのは，かなり至難です。この手の問題は，教科書でも扱っていないことが多いので，優先度も低めの問題です。a_n の指数型の問題は，対数をとることによって解決します。対数をとるために，まず任意の n に対して，$a_n>0$ であることを簡単に示します。詳しくは帰納法によりますが，そこまで丁寧に書かなくてもよしとしているようです。 常用対数をとると，$\log_a M^k=k\log_a M$ より， $\log_{10} a_{n+1}=2\log_{10} 2a_n$ となり，$2a_n$ の 2 が邪魔です。そこで，底を 10 ではなく，2 にしてみます。すると，$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$によりうまくいきます。 $a_1=4>0$ と漸化式の形から，任意の自然数 n に対して $a_n>0$ である。 $a_{n+1}=2a_n^2$ の両辺に 2 を底とする対数をとると， $\log_2 a_{n+1}=2\log_2 2a_n$ $\qquad\qquad=2(\log_2 2+\log_2 a_n)$ $\qquad\qquad=2+2\log_2 a_n$ $b_n=\log_2 a_n$・・・① とおくと，$b_1=\log_2 a_1=2$であり， $b_{n+1}=2b_n+2$　変形すると，$b_{n+1}+2=2(b_n+2)$ 数列　$\{b_n+2\}$ は初項 $b_1+2=4$，公比 2 の等比数列であるから， $b_n+2=4\cdot 2^{n-1}\quad\therefore b_n=2^{n+1}-2$ ①より，$a_n=2^{b_n}=2^{2^{n+1}-2}$ 注　少し表記が分かりづらいですが，2 の$(2^{n+1}-2)$乗です。 **答え　$a_n=2^{2^{n+1}-2}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$**
C12	$(n+p)a_{n+1}=(n+q)a_n+r(p<q)$ 型の漸化式
Q12	次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $$a_1=2,\quad na_{n+1}=(n+1)a_n$$
A12	$na_{n+1}=(n+1)a_n\ \rightarrow\ b_{n+1}=qb_n+f(n)$ となるような b_n が見つかればいいなと思うわけです。 ここで，a_{n+1} と a_n の係数に注目すると，$n<n+1$ となっています。 これより，1 以上の数を掛けても b_{n+1}，b_n の関係を作れません。 ですから 1 以下の数，すなわち分数を考えます。 今回は誘導に従い，$\dfrac{1}{n(n+1)}$ をかけます。仮に誘導が無くてもできるようにしましょう。なお，この問題は $b_{n+1}=pb_n(+q)$ となるような b_n を求めることに重きをおいているので，$r=0$ であるが，r があるときには，階差数列を利用して解くことになります。

	漸化式に $\dfrac{1}{n(n+1)}$ をかけると，　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$ $b_n=\dfrac{a_n}{n(n+1)}$ とおくと，　$b_1=\dfrac{2}{1\cdot 2}=1$，　$b_{n+1}=b_n$ $\therefore b_n=b_{n-1}=\cdots=b_1=1$ $a_n=n(n+1)b_n$ であるから，　$a_n=n(n+1)\cdot 1$ **答え　$a_n=n(n+1)(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$**
C13	$(n+p)a_{n+1}=(n+q)a_n+r(p>q)$ 型の漸化式
Q13	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1=1,\quad a_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}a_n+1$
A13	$a_{n+1}=\dfrac{n}{n+2}a_n+1$ を変形すると，　$(n+2)a_{n+1}=na_n+n+2$ $(n+2)a_{n+1}=na_n+n+2\quad\rightarrow\quad b_{n+1}=b_n+f(n)$ となるような b_n が見つかればいいなと思うわけです。a_n の係数は n であるから，　a_{n+1} の係数が $n+1$ であればいいなと思うわけです。そこで試しに $n+1$ をかけてみると， $(n+1)(n+2)a_{n+1}=n(n+1)a_n+(n+1)(n+2)$ となり，　$b_n=n(n+1)a_n$ とおくとうまくいきました。 一般に，　$(n+p)a_{n+1}=(n+q)a_n+r$型の漸化式は，　連続する整数の積となるように掛けたり，　割ったりすることによって $b_{n+1}=b_n+f(n)$の形に変形できます。 漸化式の両辺に $n+1$ をかけると， $(n+1)(n+2)a_{n+1}=n(n+1)a_n+(n+1)(n+2)$ $b_n=n(n+1)a_n$ とおくと，　$b_1=2$，　$b_{n+1}=b_n+(n+1)(n+2)$ 数列 $\{b_n\}$ の階差数列を考えると， $n\geqq 2$　のとき $b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)(k+2)$ $=2+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^2+3\sum_{k=1}^{n-1}k+2\sum_{k=1}^{n-1}1$ $=2+\dfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+3\cdot\dfrac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)$ $=\dfrac{1}{6}n(2n^2-3n+1)+3\cdot\dfrac{1}{2}(n-1)n+2+2n-2$(定数項をなくす) $=\dfrac{1}{6}n(2n^2-3n+1+9n-9+12)$

	$=\dfrac{1}{6}n(2n^2+6n+4)$ $=\dfrac{1}{3}n(n^2+3n+2)$ $=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)(n=2,\quad 3,\quad \cdots)$ $n=1$ のとき　$\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=2=b_1$ であるから，　$n=1$ のときも成立する。 $a_n=\dfrac{b_n}{n(n+1)}$ であるから，　$a_n=\dfrac{1}{3}(n+2)(n=1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots)$ **答え　$a_n=\dfrac{1}{3}(n+2)(n=1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots)$**
C14	隣接 3 項間の特性方程式
Q14	$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0(pq\neq 0)$・・・①　で定められる数列　$\{a_n\}$　において，$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$・・・②を満たす実数　α，　β　は　x　の　2　次方程式 $x^2+px+q=0$　の解であることを示せ。
A14	一般に，①の　a_{n+2}，　a_{n+1}，　a_n　を　x^2，　x，　1　と置き換えた 2 次方程式 $x^2+px+q=0$　を特性方程式といいます。 特性方程式の解を　α，　β　とおくと，②のように①を変形することができます。 $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$，　$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ ②を変形すると，　$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ これと，①を比較すると，　$\alpha+\beta=-p$，　$\alpha\beta=q$・・・③ 2 次方程式の解と係数の関係より，　α，　β　を解にもつ 2 次方程式の 1 つは， $x^2+px+q=0$　である。(Q.E.D)
C15	隣接 3 項間の漸化式(解が 1，　α)
Q15	$a_1=1$，　$a_2=4$，　$a_{n+2}+a_{n+1}-2a_n=0$
A15	特性方程式　$x^2+x-2=0$　すなわち　$(x+2)(x-1)=0$　を解くと， $x=-2$，　1　よって， $a_{n+2}+2a_{n+1}=(a_{n+1}+2a_n)$・・・①，　$a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n)$・・・② なお，解答の記述においては，特性方程式という言葉や導出過程を書かずに，①または②をいきなり書くのが一般的です。 本問のように解に 1 を含む場合は，①もしくは②のどちらか 1 つの式を用いて解くことができます。今回は両方の解き方を示します。 (解法 1　①を利用する場合)

	与えられた漸化式を変形すると， $a_{n+2}+2a_{n+1}=(a_{n+1}+2a_n)$ $a_{n+1}+2a_n=b_n$とおくと， $b_1=4+2\cdot 1=6$ $b_{n+1}=b_n$ であるから， 数列 $\{b_n\}$ は定数関数である。 $b_n=b_{n-1}=\cdots b_1=6$ よって， $a_{n+1}+2a_n=6$ これを変形すると， $a_{n+1}-2=-2(a_n-2)$ $a_n-2=c_n$ とおくと， $c_1=a_1-2=-1$， $c_{n+1}=-2c_n$ よって， 数列 $\{c_n\}$ は初項 -1， 公比 -2 の等比数列である。 $\therefore \quad c_n=-(-2)^{n-1}$ これより， $a_n=-(-2)^{n-1}+2$ (解法 2　②を利用する場合) 与えられた漸化式を変形すると， $a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n)$ $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおくと， $b_1=a_2-a_1=3$， $b_{n+1}=-2b_n$ 数列 $\{b_n\}$ は初項 3， 公比 -2 の等比数列である。 $\therefore b_n=3(-2)^{n-1}$ すなわち $a_{n+1}-a_n=3(-2)^{n-1}$ であるから， 階差数列を利用して解きます。 $n \geqq 2$ のとき， $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3(-2)^{n-1}$ $=1+\dfrac{3\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)}$ $=1+1-(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}+2$ $(-2)^{1-1}+2=3=a_1$ であるから， $n=1$ のときにも成り立つ。 したがって， $a_n=(-2)^{n-1}+2(n=1,\quad 2,\quad 3,\cdots)$ **答え　$a_n=(-2)^{n-1}+2(n=1,\quad 2,\quad 3,\cdots)$**
C16	隣接 3 項間の漸化式(解が α， β)
Q16	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1=1$， $a_2=3$， $a_{n+2}-7a_{n+1}+10a_n=0$
A16	隣接 3 項間の漸化式は， まず特性方程式 $x^2-7x+10=0$ の解を解きます。解が $x=2$， 5 であるので， 2 つの式を作って， それぞれの等比数列を考えればよいです。下の①， ②のどちらか一方の式だけでも一般項を出すことができますが， 計算が少し大変になるので， ①と②の両方から， 計算していきます。 漸化式は次の 2 通りに変形できる。 $a_{n+2}-2a_{n+1}=5(a_{n+1}-2a_n)$・・・① $a_{n+2}-5a_{n+1}=2(a_{n+1}-5a_n)$・・・②

	b_n と置き換えをしてもいいですが，慣れてきたら置き換えをしないで考えます。 ①より，数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=1$ 公比 5 の等比数列であるから， $a_{n+1}-2a_n=1\cdot 5^{n-1}=5^{n-1}$・・・③ ②より，数列 $\{a_{n+1}-5a_n\}$ は初項 $a_2-5a_1=-2$ 公比 2 の等比数列であるから， $a_{n+1}-5a_n=-2\cdot 2^{n-1}=-2^n$・・・④ ③−④より，$3a_n=5^{n-1}-(-2^n)$ よって，$a_n=\dfrac{5^{n-1}+2^n}{3}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ **答え　一般項　$a_n=\dfrac{5^{n-1}+2^n}{3}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$**
C17	隣接 3 項間の漸化式(解が重解)
Q17	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1=1,\ \ a_2=4,\ \ a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$
A17	隣接 3 項間の漸化式は，まず特性方程式 $x^2-4x+4=0$ の解を求めます。 今回は，$x=2$(重解) となっているので，$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$ の 1 つの式しか出てきません。この等比数列を計算すると，$a_{n+1}=pa_n+qr^n$ 型の漸化式が出てくるので，r^{n+1} で割ることによって求めることができます。 漸化式を変形すると， $a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$ 数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ は初項 $a_2-2a_1=2$，公比 2 の等比数列であるから， $a_{n+1}-2a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$　$\therefore a_{n+1}-2a_n=2^n$・・・① ①の両辺を$2^{n+1}$で割ると， $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{2a_n}{2\cdot 2^n}=\dfrac{2^n}{2\cdot 2^n}$ $\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$・・・② とおくと，$b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{1}{2}$ $b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{2}$ 数列 $\{b_n\}$は初項 $\dfrac{1}{2}$，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから， $b_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(n-1)=\dfrac{1}{2}n$ ②より，$a_n=\dfrac{1}{2}n\cdot 2^n$

	答え　一般項　$a_n=\frac{1}{2}n\cdot 2^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
C18	連立漸化式(一般)
Q18	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。 $a_1=1$, $b_1=2$, $a_{n+1}=a_n+4b_n$, $b_{n+1}=a_n+b_n$ $a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$・・・① を満たす x, y の組を 2 組求めることによって, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
A18	連立漸化式を考えるときには, ①の誘導がよくついてくるので, これに従って解いていきます。2 組見つかるときは, それを連立計算を行うと計算が楽です。 ①の左辺に漸化式を用いると, $a_{n+1}+xb_{n+1}=a_n+4b_n+x(a_n+b_n)=(x+1)a_n+(x+4)b_n$ これを①の右辺と比較して, $y=x+1$, $xy=x+4$ $x(x+1)=x+4$ $\therefore x^2=4$ これを解いて, $x=\pm 2$ よって, $x=2$ のとき $y=3$, $a_{n+1}+2b_{n+1}=3(a_n+2b_n)$ $x=-2$ のとき $y=-1$, $a_{n+1}-2b_{n+1}=-(a_n-2b_n)$ 数列 $\{a_n+2b_n\}$ は初項 $a_1+2b_1=5$, 公比 3 の等比数列であるから, $a_n+2b_n=5\cdot 3^{n-1}$・・・② 数列 $\{a_n-2b_n\}$ は初項 $a_1-2b_1=-3$, 公比 -1 の等比数列であるから, $a_n-2b_n=-3\cdot(-1)^{n-1}$・・・③ ②+③より, $a_n=\dfrac{5\cdot 3^{n-1}-3(-1)^{n-1}}{2}$ ②−③より, $b_n=\dfrac{5\cdot 3^{n-1}+3(-1)^{n-1}}{4}$ 答え $a_n=\dfrac{5\cdot 3^{n-1}-3(-1)^{n-1}}{2}$, $b_n=\dfrac{5\cdot 3^{n-1}+3(-1)^{n-1}}{4}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
C19	連立漸化式(特殊)
Q19	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。 $a_1=-1$, $b_1=2$, $a_{n+1}=7a_n-4b_n$, $b_{n+1}=a_n+3b_n$ $\dfrac{7x-4}{x+3}=x$ の解を α とおく。このとき, $a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\gamma(a_n-\alpha b_n)$・・・①を満たす定数 γ が存在することを示し, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

A19	あまり見ることのない誘導ですが一応紹介します。 この導入は，　次の手順でできたものです。 まず，　a_{n+1} を b_{n+1} で割った式　$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{7a_n-4b_n}{a_n+3b_n}$　において， $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$　とおくと，　$c_{n+1}=\dfrac{7c_n-4}{c_n+3}$ この c_{n+1} と c_n を x に置き換えることによって　$\dfrac{7x-4}{x+3}=x$ が出てきます。 それでは誘導に従って，　求めていきましょう。なお，　解が重解のときは式が　1　つしか出てきませんので，　$a_{n+1}=pa_n+q^n$型の漸化式が出てきます。q^{n+1}　で割って，求めていきましょう。 $\dfrac{7x-4}{x+3}=x$ すなわち，　$x^2-4x+4=0$ を解くと，　$x=2$(重解) $a_{n+1}-2b_{n+1}$　を計算すると， $a_{n+1}-2b_{n+1}=(7a_n-4b_n)-2(a_n+3b_n)$ $\qquad\qquad\quad=5a_n-10b_n$ $\qquad\qquad\quad=5(a_n-2b_n)$ よって，　①を満たす定数　$\gamma=5$　が存在する。 数列　$\{a_n-2b_n\}$　は初項　$a_1-2b_1=-5$，　公比　5　の等比数列であるから， $a_n-2b_n=-5\cdot5^{n-1}=-5^n$・・・② 漸化式　$b_{n+1}=a_n+3b_n$　より，　$a_n=b_{n+1}-3b_n$　これを②に代入すると， $b_{n+1}-5b_n=-5^n$ 両辺を　5^{n+1}　で割ると， $\dfrac{b_{n+1}}{5^{n+1}}-\dfrac{5b_n}{5^{n+1}}=-\dfrac{5^n}{5^{n+1}}$ $\dfrac{b_n}{5^n}=c_n$ とおくと，　$c_1=\dfrac{2}{5}$，　$c_{n+1}=c_n-\dfrac{1}{5}$ 数列 $\{c_n\}$は初項 $c_1=\dfrac{2}{5}$，　公差 $-\dfrac{1}{5}$ の等差数列であるから， $c_n=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}(n-1)=\dfrac{-n+3}{5}$ これより，　$b_n=5^{n-1}(-n+3)$ ②より，　$a_n=-5\cdot5^{n-1}+5^{n-1}(-2n+6)=-5^{n-1}(2n-1)$ **答え　$a_n=-5^{n-1}(2n-1)$，　$b_n=5^{n-1}(-n+3)$ ($n=1$，　2，　3，　…)**
C20	分数型の漸化式(等差数列利用型)

Q20	$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{2a_n - 9}{a_n - 4}$ ・・・① で定められている数列 $\{a_n\}$ がある。 $b_n = \dfrac{1}{a_n - 3}$ とおくと，　数列 $\{b_n\}$ は等差数列になることを利用して， 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
A20	分数型の漸化式では基本的に誘導があるので，　誘導に沿って求めていきます。(誘導に沿っても計算量が多く難しい。) ちなみに，　$b_n = \dfrac{1}{a_n - 3}$ は，　①の漸化式の a_{n+1}，　a_n を x に置き換えた式 $x = \dfrac{2x - 9}{x - 4}$ すなわち，　$x^2 - 6x + 9 = 0$ の解が $x = 3$(重解)であることによる。 分母は 0 になってはいけないから，　任意の n において，　$a_n - 3 \neq 0$ をまず示します。 任意の n において，　$a_n \neq 3$ であることを背理法によって証明します。 ある 自然数 k において $a_{k+1} = 3$ となる k が存在すると仮定すると， $3 = \dfrac{2a_k - 9}{a_k - 4}$　すなわち　$3a_k - 12 = 2a_k - 9$　$\therefore a_k = 3$ これより，　漸化式の形から，　$a_{k+1} = a_k = \cdots = a_1 = 3$ となるが， これは $a_1 = 1$ に矛盾する。よって背理法によって任意の n において，　$a_n \neq 3$ このとき， $b_{n+1} = \dfrac{1}{a_{n+1} - 3}$ $= \dfrac{1}{\dfrac{2a_n - 9}{a_n - 4} - 3}$ $= \dfrac{1}{\dfrac{2a_n - 9 - 3a_n + 12}{a_n - 4}}$ $= \dfrac{a_n - 4}{-a_n + 3}$ $= \dfrac{-a_n + 4}{a_n - 3}$ $= \dfrac{-(a_n - 3) + 1}{a_n - 3}$

	$= \dfrac{1}{a_n - 3} - 1$ $= b_n - 1$ 数列 $\{b_n\}$は初項 $b_1 = \dfrac{1}{1-3} = -\dfrac{1}{2}$，　公差 -1 の等差数列であるから， $b_n = -\dfrac{1}{2} + (-1)(n-1) = \dfrac{-2n+1}{2}$ $a_n = \dfrac{1}{b_n} + 3$ であるから，　$a_n = \dfrac{1}{\dfrac{-2n+1}{2}} + 3$ $= \dfrac{-2}{2n-1} + 3$ 答え　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{-2}{2n-1} + 3 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)}$
C21	分数型の漸化式(等比数列利用型)
Q21	$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n + 4}{a_n + 1}$ ・・・① で定められている数列 $\{a_n\}$ において， $b_n = \dfrac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} (\alpha > \beta)$ とおく。 数列 $\{b_n\}$ が等比数列となるような実数 α，　β の値を求めよ。
A21	条件にしたがって式変形をしていきます。慣れないと難しいのでしっかり掴んでいきましょう。 $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} - \beta}{a_{n+1} - \alpha}$ $= \dfrac{\dfrac{a_n + 4}{a_n + 1} - \beta}{\dfrac{a_n + 4}{a_n + 1} - \alpha}$ $= \dfrac{a_n + 4 - \beta(a_n + 1)}{a_n + 4 - \alpha(a_n + 1)}$ $= \dfrac{(1-\beta)a_n + 4 - \beta}{(1-\alpha)a_n + 4 - \alpha}$ $= \dfrac{(1-\beta)\left(a_n + \dfrac{4-\beta}{1-\beta}\right)}{(1-\alpha)\left(a_n + \dfrac{4-\alpha}{1-\alpha}\right)}$

$$= \frac{1-\beta}{1-\alpha} \cdot \frac{a_n + \dfrac{4-\beta}{1-\beta}}{a_n + \dfrac{4-\alpha}{1-\alpha}} \cdot \cdot \cdot ②$$

数列 $\{b_n\}$ が等比数列となるための条件は,

$\dfrac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha} = r \cdot \dfrac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} \cdot \cdot \cdot ③$ となる実数 $r(r \neq 0)$が存在することである。

②の左辺と比較して, $\dfrac{4-\beta}{1-\beta} = -\beta$, $\dfrac{4-\alpha}{1-\alpha} = -\alpha \cdot \cdot \cdot ④$

④は, $\dfrac{4+x}{1+x} = x$ の解が $-\alpha$, $-\beta$ であることを意味している。

これを変形すると, $x^2 - 4 = 0$ よって, $x = \pm 2$ であるから,

$\alpha > \beta$ より, $-\alpha < -\beta$ であるから, $(-\alpha, \ -\beta) = (-2, \ 2)$

よって, $(\alpha, \ \beta) = (2, \ -2)$ このとき,

$r = \dfrac{1-\beta}{1-\alpha} = \dfrac{3}{-1} = -3 \neq 0$ より満たす。

答え $(\alpha, \ \beta) = (2, \ -2)$