

C5	$a_{n+1} = pa_n + q$ 型の漸化式
Q5	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 2$
A5	<p>$a_{n+1} = pa_n + q$ の a_{n+1}, a_n の代わりに α とおいた式</p> <p>$\alpha = p\alpha + q \cdots \textcircled{1}$ を用いることによって、</p> <p>$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ と等比数列の形に変形することができます。</p> <p>なお、便宜上$\textcircled{1}$を特性方程式と呼ぶ参考書もありますが、本来は隣接3項間の漸化式 $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ の</p> <p>$a_{n+2} = x^2, a_{n+1} = x, a_n = 1$ とおいた、$x^2 + px + q = 0$ のことを指します。ですから、特性方程式という言葉はむやみに用いずに、変形した式のみを記述しましょう。</p> <p>漸化式を変形すると、$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$</p> <p>$b_n = a_n + 1 \cdots \textcircled{1}$ とおくと、$b_1 = a_1 + 1 = 3, b_{n+1} = 3b_n$</p> <p>よって、数列 $\{b_n\}$ は初項3、公比3の等比数列であるから、</p> <p>$b_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$</p> <p>$\textcircled{1}$より、$a_n = b_n - 1 = 3^n - 1$</p> <p>答え $a_n = 3^n - 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$</p>