C20	分数型の漸化式(等差数列利用型)
Q20	$a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_n-9}{a_n-4}$ ・・・① で定められている数列 $\{a_n\}$ がある。 $b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ とおくと, 数列 $\{b_n\}$ は等差数列になることを利用して, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
A20	分数型の漸化式では基本的に誘導があるので, 誘導に沿って求めていきます。(誘導に沿っても計算量が多く難しい。) ちなみに, $b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$ は, ①の漸化式の a_{n+1}, a_n を x に置き換えた式 $x=\dfrac{2x-9}{x-4}$ すなわち, $x^2-6x+9=0$ の解が $x=3$(重解)であることによる。 分母は 0 になってはいけないから, 任意の n において, $a_n-3\neq 0$ をまず示します。 任意の n において, $a_n\neq 3$ であることを背理法によって証明します。 ある 自然数 k において $a_{k+1}=3$ となる k が存在すると仮定すると, $3=\dfrac{2a_k-9}{a_k-4}$ すなわち $3a_k-12=2a_k-9$ $\therefore a_k=3$

これより，漸化式の形から，$a_{k+1}=a_k=\cdots=a_1=3$ となるが，これは $a_1=1$ に矛盾する。よって背理法によって任意の n において，$a_n \neq 3$

このとき，

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+1}-3} \\
&= \frac{1}{\dfrac{2a_n-9}{a_n-4}-3} \\
&= \frac{1}{\dfrac{2a_n-9-3a_n+12}{a_n-4}} \\
&= \frac{a_n-4}{-a_n+3} \\
&= \frac{-a_n+4}{a_n-3} \\
&= \frac{-(a_n-3)+1}{a_n-3} \\
&= \frac{1}{a_n-3}-1 \\
&= b_n-1
\end{aligned}$$

数列 $\{b_n\}$は初項 $b_1=\dfrac{1}{1-3}=-\dfrac{1}{2}$，公差 -1 の等差数列であるから，$b_n=-\dfrac{1}{2}+(-1)(n-1)=\dfrac{-2n+1}{2}$

$a_n=\dfrac{1}{b_n}+3$ であるから，$a_n=\dfrac{1}{\dfrac{-2n+1}{2}}+3$

$$=\frac{-2}{2n-1}+3$$

答え　$a_n=\dfrac{-2}{2n-1}+3\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$