三角関数の合成

三角関数の合成

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

$$\text{ただし,}\quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

三角関数の合成の証明

xy 座標平面上に点P(a,　b) をとる。$\mathrm{OP}=r$ とし, 線分 OP が x 軸の正の向きとなす角を α とすると次の関係が成り立ちます。

$r=\sqrt{a^2+b^2}$,　$a=r\cos\alpha$,　$b=r\sin\alpha$

$$\begin{aligned} a\sin\theta + b\cos\theta &= r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta \\ &= r\sin(\theta+\alpha) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \end{aligned}$$

ただし,　$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,　$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(証明終わり)

三角関数の合成で α がどんな数か記述する理由

α が $\dfrac{\pi}{6}$ や $\dfrac{\pi}{4}$ の整数倍のときは, わざわざ α を使う必要がないので, 角度をそのまま書きます。問題は, 角度が求められないときです。α は自分でおいた文字なので, α がどういうものなのか記述する必要があります。なお, 物理では $0\leqq\alpha\leqq\pi$ で考えているので, tan の値のみを記述しますが, 数学では一般に, $-\pi<\alpha\leqq\pi$ または $0\leqq\alpha<2\pi$ を考えるので, sin と cos の両方を記述します。

三角関数の合成をする理由

2 次関数 x^2 は変数が 1 つなので, 最大・最小を求めることが簡単でした。
2 次関数 ax^2+bx+c は, 変数が ax^2 と bx の 2 つあるので, 変化を考えるのが難しい。だから, 平方完成をして, 変数を 1 つにしたのでした。三角関数でも $\sin\theta$ と $\cos\theta$ という 2 つの変数を 1 つにすることで最大・最小を求めやすくする方法を三角関数の合成といいます。 三角関数の合成には, sin にまとめる方法と cos にまとめる方法がありますが, 一般的に三角関数の合成では sin にまとめる方法が一般的です。