C9	$a_{n+1}=pa_n+rq^n$ 型の漸化式
Q9	次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1=4,\quad a_{n+1}=6a_n+2^{n+2}$
A9	$a_{n+1}=6a_n+2^{n+2} \quad \to \quad b_{n+1}=pb_n+q$ となるような b_n が見つかればいいなと思うわけです。比較してみると, 2^{n+2} が定数になれば良い。 引き算で消そうと思っても適切な b_n が見つかりません。そこで, 試しに 2^{n+2} で割ってみます。 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+2}}=\frac{6a_n}{2^{n+2}}+\frac{2^{n+2}}{2^{n+2}}$ (分母と分子の n が一致していないので揃えます。) ここで, $2^{n+2}=2\cdot 2^{n+1}$, $2^{n+2}=2^2\cdot 2^n$ であるから, $\frac{1}{2}\cdot\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{6}{4}\cdot\frac{a_n}{2^n}+1$ (b_{n+1} にあたる部分の係数が 1 になるように 2 をかける) よって, $a_{n+1}=pa_n+rq^n$型の漸化式においては, q^{n+1} で割ればよい。 $a_{n+1}=6a_n+2^{n+2}$ の両辺を 2^{n+1} で割ると, $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{6a_n}{2^{n+1}}+\frac{2^{n+2}}{2^{n+1}}$ すなわち, $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{6}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n}+2$ ($\because 2^{n+2}=2^{n+1}\cdot 2$)

$b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ ・・・①とおくと，　$b_1 = 2$，　$b_{n+1} = 3b_n + 2$

よって，　$b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 3$，　公比 3 の等比数列であるから，　$b_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1}$　　$\therefore b_n = 3^n - 1$

①より，　$a_n = (2 \cdot 3)^n - 2^n = 6^n - 2^n$

答え　一般項 $a_n = 6^n - 2^n$ ($n = 1$，　2，　3，　…)