

C6	$a_{n+1} = pa_n + qn + r$ 型の漸化式
Q6	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2n - 2$
A6	<p>$a_{n+1} = 3a_n + 2n - 2 \cdots \textcircled{1}$ の n を $n+1$ に置き換えた式は,</p> <p>$a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2(n+1) - 2 \cdots \textcircled{2}$</p> <p>$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より,</p> <p>$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) + 2 \cdots \textcircled{3}$</p> <p>$a_{n+1} - a_n = b_n \cdots \textcircled{3}$ とおくと,</p> <p>$b_1 = a_2 - a_1 = (3a_1 + 2 \cdot 1 - 2) - 1 = 2, b_{n+1} = 3b_n + 2$</p> <p>これを变形すると, $b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$</p> <p>よって, 数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 3$, 公比 3 の等比数列であるから,</p> <p>$b_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$</p> <p>よって, $b_n = 3^n - 1$</p> <p>$\textcircled{3}$ より, $a_{n+1} - a_n = 3^n - 1$</p> <p>数列 $\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $3^n - 1$ であるから,</p> <p>$n \geq 2$ のとき,</p> $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3^k - 1)$

$$= 1 + \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} - (n - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3^n - n + \frac{1}{2}$$

答え 一般項 $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n - n + \frac{1}{2} (n = 1, 2, 3, \dots)$