C11	$a_{n+1}=pa_n^q$ 型の漸化式
Q11	$a_1=4$, $a_{n+1}=2a_n^2$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
A11	初見で解くのは，かなり至難です。この手の問題は，教科書でも扱っていないことが多いので，優先度も低めの問題です。a_n の指数型の問題は，対数をとることによって解決します。対数をとるために，まず任意の n に対して，$a_n>0$ であることを簡単に示します。詳しくは帰納法によりますが，そこまで丁寧に書かなくてもよしとしているようです。 常用対数をとると，$\log_a M^k=k\log_a M$ より， $\log_{10} a_{n+1}=2\log_{10} 2a_n$ となり，$2a_n$ の 2 が邪魔です。そこで，底を 10 ではなく， 2 にしてみます。すると，$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$によりうまくいきます。 $a_1=4>0$ と漸化式の形から，任意の自然数 n に対して $a_n>0$ である。 $a_{n+1}=2a_n^2$ の両辺に 2 を底とする対数をとると， $\log_2 a_{n+1}=2\log_2 2a_n$

$= 2(\log_2 2 + \log_2 a_n)$
$= 2 + 2\log_2 a_n$

$b_n = \log_2 a_n$・・・① とおくと，　$b_1 = \log_2 a_1 = 2$であり，

$b_{n+1} = 2b_n + 2$　変形すると，　$b_{n+1} + 2 = 2(b_n + 2)$

数列　$\{b_n + 2\}$ は初項 $b_1 + 2 = 4$，　公比 2 の等比数列である

から，

$b_n + 2 = 4 \cdot 2^{n-1}$　$\therefore b_n = 2^{n+1} - 2$

①より，　$a_n = 2^{b_n} = 2^{2^{n+1}-2}$

注　少し表記が分かりづらいですが，　2 の$(2^{n+1} - 2)$乗です。

答え　$a_n = 2^{2^{n+1}-2}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$