C19	連立漸化式(特殊)
Q19	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。 $a_1=-1$, $b_1=2$, $a_{n+1}=7a_n-4b_n$, $b_{n+1}=a_n+3b_n$ $\dfrac{7x-4}{x+3}=x$ の解を α とおく。このとき, $a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\gamma(a_n-\alpha b_n)$・・・①を満たす定数 γ が存在することを示し, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
A19	あまり見ることのない誘導ですが一応紹介します。 この導入は, 次の手順でできたものです。 まず, a_{n+1} を b_{n+1} で割った式 $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{7a_n-4b_n}{a_n+3b_n}$ において, $c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$ とおくと, $c_{n+1}=\dfrac{7c_n-4}{c_n+3}$ この c_{n+1} と c_n を x に置き換えることによって $\dfrac{7x-4}{x+3}=x$ が出てきます。 それでは誘導に従って, 求めていきましょう。なお, 解が重解のときは式が 1 つしか出てきませんので, $a_{n+1}=pa_n+q^n$ 型の漸化式が出てきます。q^{n+1} で割って, 求めていきましょう。 $\dfrac{7x-4}{x+3}=x$ すなわち, $x^2-4x+4=0$ を解くと, $x=2$(重解)

$a_{n+1}-2b_{n+1}$ を計算すると，

$$a_{n+1}-2b_{n+1}=(7a_n-4b_n)-2(a_n+3b_n)$$
$$=5a_n-10b_n$$
$$=5(a_n-2b_n)$$

よって，①を満たす定数 $\gamma=5$ が存在する。

数列 $\{a_n-2b_n\}$ は初項 $a_1-2b_1=-5$，公比 5 の等比数列

であるから，

$a_n-2b_n=-5\cdot5^{n-1}=-5^n$ ・・・②

漸化式 $b_{n+1}=a_n+3b_n$ より，$a_n=b_{n+1}-3b_n$ これを②に

代入すると，

$b_{n+1}-5b_n=-5^n$

両辺を 5^{n+1} で割ると，

$$\frac{b_{n+1}}{5^{n+1}}-\frac{5b_n}{5^{n+1}}=-\frac{5^n}{5^{n+1}}$$

$\frac{b_n}{5^n}=c_n$ とおくと，$c_1=\frac{2}{5}$，$c_{n+1}=c_n-\frac{1}{5}$

数列 $\{c_n\}$は初項 $c_1=\frac{2}{5}$，公差 $-\frac{1}{5}$ の等差数列であるから，

$$c_n=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}(n-1)=\frac{-n+3}{5}$$

これより，$b_n=5^{n-1}(-n+3)$

②より，$a_n=-5\cdot5^{n-1}+5^{n-1}(-2n+6)=-5^{n-1}(2n-1)$

答え $a_n=-5^{n-1}(2n-1)$，$b_n=5^{n-1}(-n+3)$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$