

C10	$a_{n+1} = \frac{ra_n}{pa_n+q}$ 型の漸化式
Q10	$a_1 = \frac{1}{2}$ , $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+2}$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
A10	<p><math>a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+2} \cdots \textcircled{1}</math>において,</p> <p><math>a_1 \neq 0</math> と漸化式の形から, <math>a_n \neq 0 (n = 1, 2, 3, \dots)</math></p> <p>よって, <math>\textcircled{1}</math>の逆数をとると</p> $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_n} - \frac{2}{a_n} = 1 - \frac{2}{a_n}$ <p><math>b_n = \frac{1}{a_n}</math> とおくと, <math>b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}</math>, <math>b_1 = \frac{1}{a_1} = 2</math></p> $b_{n+1} = 2b_n + 1$ $b_{n+1} + 2 = 2(b_n + 1)$ <p>数列 <math>\{b_n\}</math> は初項 2, 公比 2 の等比数列であるから,</p> $b_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \text{よって, } b_n = 2^n - 1$ $\therefore a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{2^n - 1} (n = 1, 2, 3, \dots)$ <p><b>答え</b> <math>a_n = \frac{1}{2^n - 1} (n = 1, 2, 3, \dots)</math></p>