C18	連立漸化式(一般)
Q18	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。 $a_1=1$, $b_1=2$, $a_{n+1}=a_n+4b_n$, $b_{n+1}=a_n+b_n$ $a_{n+1}+xb_{n+1}=y(a_n+xb_n)$・・・① を満たす x, y の組を 2 組求めることによって, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
A18	連立漸化式を考えるときには, ①の誘導がよくついてくるので, これに従って解いていきます。2 組見つかるときは, それを連立計算を行うと計算が楽です。 ①の左辺に漸化式を用いると, $a_{n+1}+xb_{n+1}=a_n+4b_n+x(a_n+b_n)=(x+1)a_n+(x+4)b_n$ これを①の右辺と比較して, $y=x+1$, $xy=x+4$ $x(x+1)=x+4$ $\therefore x^2=4$ これを解いて, $x=\pm 2$ よって, $x=2$ のとき $y=3$, $a_{n+1}+2b_{n+1}=3(a_n+2b_n)$ $x=-2$ のとき $y=-1$, $a_{n+1}-2b_{n+1}=-(a_n-2b_n)$ 数列 $\{a_n+2b_n\}$ は初項 $a_1+2b_1=5$, 公比 3 の等比数列であるから, $a_n+2b_n=5\cdot 3^{n-1}$・・・② 数列 $\{a_n-2b_n\}$ は初項 $a_1-2b_1=-3$, 公比 -1 の等比数

列であるから，

$$a_n - 2b_n = -3\cdot(-1)^{n-1}\quad\cdot\cdot\cdot③$$

②＋③より，

$$a_n = \frac{5\cdot 3^{n-1} - 3(-1)^{n-1}}{2}$$

②−③より，

$$b_n = \frac{5\cdot 3^{n-1} + 3(-1)^{n-1}}{4}$$

答え

$$\boldsymbol{a_n = \frac{5\cdot 3^{n-1} - 3(-1)^{n-1}}{2},\quad b_n = \frac{5\cdot 3^{n-1} + 3(-1)^{n-1}}{4}}$$

$\boldsymbol{(n = 1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots)}$