C13	$(n+p)a_{n+1}=(n+q)a_n+r(p>q)$ 型の漸化式
Q13	次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 $$a_1=1,\quad a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n+1$$
A13	$a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n+1$ を変形すると， $(n+2)a_{n+1}=na_n+n+2$ $(n+2)a_{n+1}=na_n+n+2 \quad \to \quad b_{n+1}=b_n+f(n)$ となるような b_n が見つかればいいなと思うわけです。a_n の係数は n であるから，a_{n+1} の係数が $n+1$ であればいいなと思うわけです。そこで試しに $n+1$ をかけてみると， $(n+1)(n+2)a_{n+1}=n(n+1)a_n+(n+1)(n+2)$ となり， $b_n=n(n+1)a_n$ とおくとうまくいきました。 一般に，$(n+p)a_{n+1}=(n+q)a_n+r$型の漸化式は，連続する整数の積となるように掛けたり，割ったりすることによって $b_{n+1}=b_n+f(n)$の形に変形できます。 漸化式の両辺に$n+1$をかけると， $(n+1)(n+2)a_{n+1}=n(n+1)a_n+(n+1)(n+2)$ $b_n=n(n+1)a_n$ とおくと，$b_1=2$，$b_{n+1}=b_n+(n+1)(n+2)$ 数列 $\{b_n\}$ の階差数列を考えると，

$n \geqq 2$　のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)(k+2)$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1}k^2 + 3\sum_{k=1}^{n-1}k + 2\sum_{k=1}^{n-1}1$$

$$= 2 + \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + 3 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + 2(n-1)$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2 - 3n + 1) + 3 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + 2 + 2n - 2$$

(定数項をなくす)

$$= \frac{1}{6}n(2n^2 - 3n + 1 + 9n - 9 + 12)$$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2 + 6n + 4)$$

$$= \frac{1}{3}n(n^2 + 3n + 2)$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)(n = 2,\quad 3,\quad \cdots)$$

$n = 1$ のとき　$\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2 = b_1$ であるから，

$n = 1$ のときも成立する。

$a_n = \dfrac{b_n}{n(n+1)}$ であるから，　$a_n = \dfrac{1}{3}(n+2)$

答え　$a_n = \dfrac{1}{3}(n+2)(n = 1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots)$