C1	相加平均・相乗平均
Q1	$a>0$，$b>0$ のとき，$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ が成り立つことを示せ。
C2	4 つの相加平均・相乗平均
Q2	$\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{13}+\sqrt{14}>12$ であることを証明せよ。
C3	$\dfrac{1}{\sqrt{X}}$ の最大値
Q3	x を実数とする。$f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$ の最大値を求めよ。
C4	三角対称式
Q4	$\theta \neq \dfrac{n\pi}{2}$ $(n$ は整数$)$ とする。 $\left\lvert \sin\theta+\cos\theta+\tan\theta+\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\tan\theta} \right\rvert$ の最小値を求めよ。
C5	対称式・相加相乗平均発展問題
Q5	放物線 $y=x^2$ 上に異なる 2 点 P，Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。 (1) 線分 PQ の長さを L，傾きを m とするとき，h を L と m を用いて表わせ。 (2) $L(L \geqq 1)$ と固定するとき，h のとりうる値の最小値を求めよ。

C1	相加平均・相乗平均
Q1	$a>0,\ \ b>0$ のとき，$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ が成り立つことを示せ。
A1	(解答) $a>0,\ \ b>0$ より，$a+b>0,\ \ ab>0$・・・① $(a+b)^2-\left(2\sqrt{ab}\right)^2=a^2+2ab+b^2$ $=(a+b)^2 \geqq 0$(∵ $a+b$ は実数) よって，$(a+b)^2 \geqq \left(2\sqrt{ab}\right)^2$ ①より，$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$(Q.E.D) (解説) $a>0,\ \ b>0$ であるから，相加平均・相乗平均より， $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$・・・①　よって，$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$・・・②(Q.E.D) としてはいけません。そもそも①，②はともに相加平均・相乗平均のことであるので，この問題の本質は，相加平均・相乗平均の証明問題だと気づかなければなりません。それに気づけないのであれば，点数は当然ありません。△△の定理を証明するのに△△の定理よりと書くのはおかしいですよね。今回間違えてしまった場合は猛省してください。
C2	4 つの相加平均・相乗平均
Q2	$\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{13}+\sqrt{14}>12$ であることを証明せよ。
A2	(解答) 整数 a に対して，$\sqrt{a}>0$ であるから，相加平均・相乗平均より， $\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{13}+\sqrt{14} \geqq 2\sqrt[4]{42}+2\sqrt[4]{182} \geqq 4\sqrt[8]{7644}$ ここで，$3^8=6561$ であるから， $\sqrt[8]{7644}>\sqrt[8]{6561}=3$ よって，$\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{13}+\sqrt{14}>4\cdot 3=12$(Q.E.D) (解説) $\sqrt{6}>2,\ \ \sqrt{7}>2,\ \ \sqrt{13}>3,\ \ \sqrt{14}>3$ とすると，10 より大きいことしか示せないので，評価が甘いようです。小数点第 1 位まで精度を高めれば証明できますが，少々面倒です。なのでここでも相加平均・相乗平均の出番です。 $a+b+c+d \geqq \sqrt[4]{abcd}$ ももちろん成り立ちますが，教科書には 2，3 つの相加・相乗平均しか記載がないため，そのままでは使えません。証明は大変なので，2 つの相加平均・相乗平均を 2 回使うことによって求める方法でいきます。(結果的に 4 つのときと同じになります)。また，$\sqrt{6}+\sqrt{7} \geqq 2\sqrt{42}$ ではなく， $\sqrt{3}+\sqrt{11} \geqq 2\sqrt{\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}}=2\sqrt{\sqrt{33}}=2\sqrt[4]{33}$ であることに注意しましょう。

	最後の評価では， 12 より大きいことを示せばいいので， 3^8 の値のみを調べ， 4^8 は調べる必要がありません。
C3	$\dfrac{1}{\sqrt{X}}$ の最大値
Q3	x を実数とする。$f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$ の最大値を求めよ。
A3	(ⅰ) $x=0$ のとき　$f(0)=0$ (ⅱ) $x\neq 0$ のとき　分母分子を $x\neq 0$ で割ると， $f(x)=\dfrac{1}{x+\dfrac{2}{x}}$ (a) $x>0$ のとき， $\dfrac{1}{x}>0$ であるから， 相加平均・相乗平均より， $f(x)\leqq \dfrac{1}{2\sqrt{x\cdot\dfrac{2}{x}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ 等号成立条件は $x=\dfrac{1}{x}$ すなわち $x^2=1$ $x>0$ より， $x=1$ (b) $x<0$ のとき $x^2+2>0$ であるから， $f(x)<0$ (ⅰ)(ⅱ)より， $x=1$ のとき 最大値 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (解説) 正の実数 X が大きくなるほど， $\dfrac{1}{X}$ は小さくなることはいいでしょうか。 正しくは微分を習った後に単調減少という言葉を習うのですが， 現時点では，具体的な値での比較または図を利用して考えるといいでしょう。 この考え方を応用すると， 正の実数 X が最小値をとる　$\Leftrightarrow$　$\dfrac{1}{X}$ は最大値をとる となります。 相加平均・相乗平均といえば最小値と相性がいいですが， 分数では最大値と最小値が変わることから， 最大値を考える際にも重要であることも覚えておきましょう。

C4	三角対称式
Q4	$\theta \neq \frac{n\pi}{2}$ (n は整数) とする。 $\left\|\sin\theta + \cos\theta + \tan\theta + \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\tan\theta}\right\|$ の最小値を求めよ。
A4	$\sin\theta + \cos\theta = t$ とおくと，三角関数の合成より， $t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ $\theta = \frac{n\pi}{2}$ のとき，$t = \sqrt{2}\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm 1$ であるから，$\theta \neq \frac{n\pi}{2}$ のとき $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ かつ $t \neq \pm 1$・・・① $\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = t^2$ であるから， $\sin\theta\cos\theta = \frac{t^2-1}{2}$ $\left\|\sin\theta + \cos\theta + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right\|$ $= \left\|\sin\theta + \cos\theta + \frac{\sin\theta + \cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right\|$ $= \left\|t + \frac{t+1}{\frac{t^2-1}{2}}\right\|$ $= \left\|t + \frac{2(t+1)}{(t-1)(t+1)}\right\|$ $= \left\|t + \frac{2}{t-1}\right\|$ （ｉ）$t - 1 > 0$ すなわち $t > 1$ のとき 相加平均・相乗平均より， $t + \frac{2}{t-1} = t - 1 + \frac{2}{t-1} + 1 \geqq 2\sqrt{t - 1\cdot\frac{2}{t-1}} + 1 = 2\sqrt{2} + 1$ （ⅱ）$t < 1$ のとき $\left\|t + \frac{2}{t-1}\right\| = \left\|-t + \frac{2}{1-t}\right\| =$ $\left\|1 - t + \frac{2}{1-t} - 1\right\|$

	$\geqq \left\lvert 2\sqrt{2}-1 \right\rvert = 2\sqrt{2}-1$(∵ 相加平均・相乗平均) 等号成立は $1-t=\dfrac{2}{1-t}$ $1<t$ に注意して, $t=1-\sqrt{2}$ これは t の①の定義域内に含まれるので, 最小値 $2\sqrt{2}-1$ をとる。 (解説) 解説すべきことはいっぱいありますが, 他の問題に任せて, 最後の答え方にだけ言及していきます。最大・最小の問題では, 言及がなくても それを満たす x や θ の値を求めるべきだと習ったかもしれませんが, それは最大・最小をとるような変数が定義域内であることが重要だからです。今回の問題では, 具体的な値はでませんが, 定義域内にあることは示したのでこれで問題ないという判断しています。
C5	対称式・相加相乗平均発展問題
Q5	放物線 $y=x^2$ 上に異なる 2 点 P, Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。 (1) 線分 PQ の長さを L, 傾きを m とするとき, h を L と m を用いて表わせ。 (2) $L(L\geqq 1)$ と固定するとき, h のとりうる値の最小値を求めよ。
A5	(解答) $\mathrm{P}(p,\ p^2)$, $\mathrm{Q}(q,\ q^2)(p\neq q)$ とすると, h は p と q の対称式であるから, 基本対称式を用いて表すことができる。 $h=\dfrac{p^2+q^2}{2}=\dfrac{(p+q)^2-2pq}{2}$ ・・・① 以下, L と m の関係式から, $p+q$ と pq の値を求めていく。 $m=\dfrac{q^2-p^2}{q-p}=p+q$・・・② $L^2=(q-p)^2+(q^2-p^2)^2$ $=(q-p)^2+(q-p)^2(q+p)^2$ $=(q-p)^2\{1+(q+p)^2\}$ $=\{(q+p)^2-4qp\}\{1+(q+p)^2\}$ $=(m^2-4pq)(1+m^2)$ $\therefore\quad pq=\dfrac{1}{4}\left(m^2-\dfrac{L^2}{1+m^2}\right)$ ・・・③ ②, ③を①に代入して,

$$h=\frac{m^2-\frac{1}{2}\left(m^2-\frac{L^2}{1+m^2}\right)}{2}=\frac{1}{4}\left(m^2-\frac{L^2}{1+m^2}\right)$$

(2)

$$h=\frac{1}{4}\left(m^2-\frac{L^2}{1+m^2}\right)=\frac{1}{4}\left(1+m^2-\frac{L^2}{1+m^2}\right)-\frac{1}{4}$$

$1+m^2>0,\quad \frac{L^2}{1+m^2}>0$ であるから，　相加平均・相乗平均より，

$$h\geqq\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{1+m^2\cdot\frac{L^2}{1+m^2}}-\frac{1}{4}=\frac{2L-1}{4}$$

等号成立は，　$1+m^2=\frac{L^2}{1+m^2}\qquad \therefore m=\sqrt{L-1}(\because L\geqq 1)$

答え　$\frac{2L-1}{4}$

(解説)

対称式は基本対称式で表すことができます。

なお，$L\geqq 1$ と条件があるので，　相加平均･相乗平均が使えましたが，　$0<L<1$ では，　$m=\sqrt{L-1}$ の根号の中身は負となり，　等号を満たす実数 m が存在しないことになります。この場合は微分を使って解く必要があります。では最初から微分すればいいのではと思うかもしれませんが，　微分は計算が大変なので，　絶対不等式と呼ばれる相加平均･相乗平均やコーシーシュワルツの不等式は最初に考えるとよいでしょう。