関数 $f(x)$ は任意の実数 x に対し $f''(x) < 0$ をみたす。以下の問いに答えよ。
(1)　グラフ $y = f(x)$ が上に凸であること，すなわち任意の実数 a，$b(a < b)$ および $0 < t < 1$ なる実数 t に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$tf(a) + (1-t)f(b) \leqq f(ta + (1-t)b)$$

$g(t) = f\big((a-b)t + b\big) - \{tf(a) + (1-t)f(b)\}$ とおくと，
$g'(t) = (a-b)f'\big((a-b)t + b\big) - f(a) + f(b)$
$g''(t) = (a-b)^2 f''\big((a-b)t + b\big)$
仮定より，$f''\big((a-b)t + b\big) < 0$ であるので，
$g''(t) < 0$
よって，$g'(t)$ は単調減少である。
$f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，開区間$(a,\ b)$ で微分可能であるから，
平均値の定理より，

$$\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = f'(c),\quad a < c < b$$

を満たす実数 c が少なくとも 1 つ存在する。

$$g'(t) = (b-a)\left\{-f'\big((a-b)t + b\big) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right\}$$

$g'(t) = (b-a)\big\{f'(c) - f'\big((a-b)t + b\big)\big\}$であり，
$g'(0) = (b-a)(f'(c) - f'(b))$
$f'(x)$ は単調減少であるから，$f'(c) > f'(b)$
よって，$g'(0) > 0$
$g'(1) = (b-a)\big(f'(c) - f'(a)\big) < 0(\because f'(c) < f'(a))$
関数 $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続であるから，$g'(t)$ は単調減少であることとあわせて，中間値の定理により，
$g'(t_0) = 0$ を満たす実数 t_0 が $0 < t_0 < 1$ の範囲にただ 1 つ存在する。
また，
$g(0) = f(b) - f(b) = 0$
$g(1) = f(a) - f(a) = 0$
これより，増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	t_0	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	↗		↘	0

よって，$g(t) > 0$ であるから，題意は示されました。