

共役無理数の証明

a, b, r は 0 でない有理数, \sqrt{r} は無理数であるとする。有理数係数の n 次方程式が $a + b\sqrt{r}$ を解にもつとき, $a - b\sqrt{r}$ も解であることを証明しなさい。

有理数係数の n 次の整式を $P(x)$, $a + b\sqrt{r} = \alpha$, $a - b\sqrt{r} = \beta$

$P(x)$ を $(x - \alpha)(x - \beta)$ で割った商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とする。

$P(x)$ は有理数係数の整式であるから, 2次式 $(x - \alpha)(x - \beta)$ で割った余りは1次式であり, 1次式の係数は有理数である。よって, $R(x) = dx + e$ とおける。

すなわち,

$$P(x) = (x - \alpha)(x - \beta)Q(x) + dx + e$$

$$P(\alpha) = 0 + d\alpha + e = d(a + b\sqrt{r}) + e$$

$$P(\beta) = 0 + d\beta + e = d(a - b\sqrt{r}) + e$$

$$\alpha \text{ を解にもつので, } P(\alpha) = ad + e + be\sqrt{r} = 0$$

$$ad + e, be \text{ は有理数, } \sqrt{r} \text{ は無理数であるから, } ad + e = 0, be = 0 \cdots \textcircled{1}$$

このとき,

$$P(\beta) = ad + e - be\sqrt{r} = 0 - 0 = 0(\because \textcircled{1})$$

よって, $a - b\sqrt{r}$ も $P(x) = 0$ の解になるから, 題意は示されました。

(解説)

3次や4次のように次数が具体的でなく, n 次方程式と問題文にあると何をしていいかわからなくなってしまうかもしれません。ですが, 基本問題でも整式 $P(x)$ を1次式で割った余りの条件をもとに2次式の余りを求める問題はよくやったと思います。2次式で割ったときの余りは1次式以下で, 変数が2つ存在します。通常は, 2つの条件式が必要ですが, 有理数と無理数の混同式においては,

a, b は有理数で, \sqrt{r} が無理数のとき

$$a + b\sqrt{r} = 0 \Leftrightarrow a = 0, b = 0$$

であり, 2つの値を入手することができます。

1粒で2度おいしい式ですね!

なお, 有理数係数でなく, 実数係数の方程式の場合は, その限りではありません。

例えば, $x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 = 0$ は,

$$(x - \sqrt{3})(x - 2\sqrt{3}) = 0$$

であるから, $x = \sqrt{3}, 2\sqrt{3}$ となります。