中学数学の復習

m,　n を自然数とすると，次の指数法則が成り立つ。 1　$a^m a^n = a^{m+n}$　2　$(a^m)^n = a^{mn}$　3　$(ab)^n = a^n b^n$

これは，m,　n が自然数のときのみ成り立つが，高校数学は他にも，整数，有理数，無理数を学習していくため，この法則だけでは対応しきれない。しかし，別の法則を適用させると余計な混乱を招くおそれがある。(たとえば，m,　n が整数のときに，$a^m a^n = a^{(m+n)-m\times n}$ と定義すると大変であろう)。

だから，自然数で成り立つ指数法則の 3 つの性質が，整数，有理数，無理数にも適用できるのが都合がよい。そのために，整数，有理数，無理数を指数を使って書き直していく。まずは整数から見て行こう。

0の数

まずは，$a \neq 0$ のもと，a^0 について考えてみる。
指数法則1が $m = 2,\quad n = 0$ でも成り立つと仮定すると，次の等式が成り立つ。
$a^2 a^0 = a^{2+0}$
$a^2 a^0 = a^2$
$a \neq 0$ より，$a^2 \neq 0$ であるから，両辺を a^2 で割って，
$a^0 = 1$・・・①(これは指数法則2，3も成り立つ。)

負の数

次に， a^{-n} について考えてみる。

指数法則 1 が $m = -n, \quad n$ でも成り立つと仮定すると， 次の等式が成り立つ。

$a^{-n}a^{n} = a^{-n+n}$

$a^{-n}a^{n} = a^{0}$

$a^{-n}a^{n} = 1 (\because ①)$

両辺を $a^{n} \neq 0$ で割って，

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^{n}}$

要するに， $a \neq 0$ のもと $m, \quad n$ が自然数だけでなく， 整数でも成り立つように 0 の指数と負の数の指数を定義したのが， 以下のとおりである。

$$a^{0} = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$$

だから， $a^{0} = 1$ や $a^{-2} = \dfrac{1}{a^{2}}$ が成り立つのはなぜか， という問いの答えとしては,

指数法則を成り立たせるために， 定義したと答えるのがいいでしょう。

累乗根

有理数を考えるうえで，累乗根が重要になるので，累乗根を最初に理解していきます。

中学数学の復習

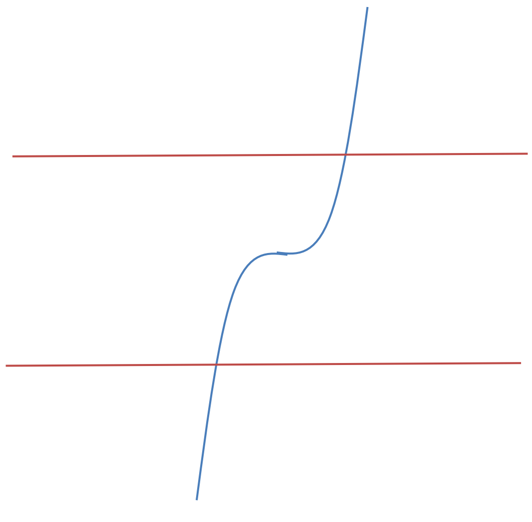
a を自然数とする。2 乗すると a になる数，すなわち $x^n=a$ となる数 x を a の平方根(2 乗根)といい，記号 $\sqrt{a}$ で表す。

高校数学

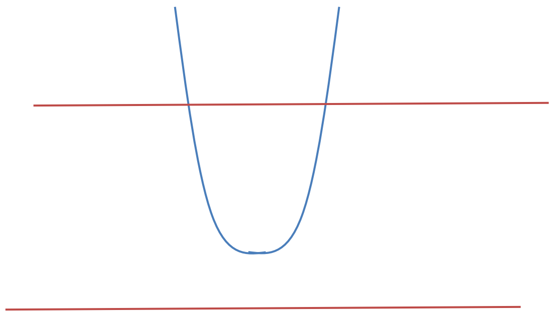
a を正の実数とする。n 乗すると a になる数，すなわち $x^n=a$ となる数 x を a の n 乗根といい，記号 $\sqrt[n]{a}$ で表す。このとき，$\sqrt[n]{a}$ は次の 2 つの条件を満たすただ 1 つの数である。 $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a,\quad \sqrt[n]{a}>0$・・・(∗)

なお，累乗根は，$y=x^n$ と直線 $y=a$ との共有点とも考えられます。$y=x^n$ は n の偶奇によって，次のように概形が変化します。

n が奇数のとき



n が偶数のとき



n が奇数のとき，$y=x^n$ のグラフは，$(-x)^n=-x^n=-y$ であるから，原点対称。

よって，対称性より，$a>0$ のとき　$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$ ex $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2$

n が偶数のとき，グラフより，n 乗根は存在しません。

n によって，場合分けをしていると少々面倒です。対称性を利用することによって，a が正のときに限定して，指数法則を考えていきます。

有理数

さて，　最初に正の有理数を考えます。

$r>0$ に対して，　$r=\dfrac{m}{n}(m>0,\quad n>0)$ とおくと，

指数法則 2 が成り立つと仮定すると，　次の等式が成り立つ。

$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}\times n}$

$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^m$・・・③

$a^m>0$ であるから，　③式は，（$*$)の定義より，　$a^{\frac{m}{n}}$ は a^m の n 乗根

すなわち，　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(他の指数法則も成り立つ。)

指数法則 1 が成り立つと仮定すると，　次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}a^{\frac{m}{n}}\times a^{-\frac{m}{n}}&=a^{\frac{m}{n}+(-\frac{m}{n})}\\&=a^0\\&=1\end{aligned}$$

$a^{\frac{m}{n}}\times a^{-\frac{m}{n}}=1$

$a^{\frac{m}{n}}\neq 0$ で両辺を割って，

$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

$a>0,\quad m,\quad n$ が自然数，　r が正の有理数とすると，　次の指数法則が成り立つ。

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\quad a^{-r}=\frac{1}{a^r}$$

特に，

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

上記の定義を踏まえると，　正だけでなく，　負の有理数 r においても，　指数法則が成り立つ。(各自具体例で確かめよ。)

$a>0$, $b>0$ で, r, s を有理数とすると, 次の指数法則が成り立つ。
1 $a^r a^s = a^{r+s}$ 2 $(a^r)^s = a^{rs}$ 3 $(ab)^r = a^r b^r$

実数

実数の拡張には極限の知識を必要とします。ですから, 厳密に定義することは現時点ではできません。極限を学んでから再び学習してみてください。現時点では, 実数において指数法則が拡張できることを知っていれば十分です。

$a>0$, $b>0$ で, x, y を実数とすると, 次の指数法則が成り立つ。
1 $a^x a^y = a^{x+y}$ 2 $(a^x)^y = a^{xy}$ 3 $(ab)^x = a^x b^x$