Q1	$1+i+i^2+i^3+i^4+i^5$ を計算せよ。ただし， i は虚数単位とする。
Q2	次の計算をせよ。ただし， i は虚数単位とする。 $$\frac{2+3i}{1+i}-\frac{6}{2-i}$$
Q3	a, b を実数とする。 $a+bi=0 \Leftrightarrow a=0$ かつ $b=0$ が成り立つことを証明せよ。ただし， i は虚数単位とする。
Q4	次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。ただし， i は虚数単位とする。 $$(1-i)x+(2+i)y=3+6i$$
Q5	複素数 z は 2 乗すると $2i$ になるという。この z を求めよ。ただし， i は虚数単位とする。
Q6	2 乗すると $8i$ になるような複素数を求めよ。ただし， i は虚数単位とする。

Q1	$1+i+i^2+i^3+i^4+i^5$ を計算せよ。ただし， i は虚数単位とする。
A1	$i^2=-1$ であるから， $1+i+i^2+i^3+i^4+i^5=1+i-1+(-1)\cdot(-i)+(-i)^2+(-i)^2\cdot i$ $=1+i-1-i+1+i$ $=1+i$ 答え　$i+i$

Q2	次の計算をせよ。ただし，i は虚数単位とする。 $$\frac{2+3i}{1+i}-\frac{6}{2-i}$$
A2	$\frac{2+3i}{1+i}-\frac{6}{2-i}=\frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}-\frac{6(2+i)}{(2-i)(2+i)}$ $=\frac{2-2i+3i+3}{1+1}+\frac{-12-6i}{4+1}$ $=\frac{5+i}{2}+\frac{-12-6i}{5}$ $=\frac{25+5i}{10}+\frac{-24-12i}{10}$ $=\frac{1-7i}{10}$ 答え　$\frac{1-7i}{10}$ (解説) 分数だからと通分をすぐにせずに，まずは分母の有理化の要領で実数化を行っていきましょう。 $\frac{2+3i}{1+i}-\frac{6}{2-i}=\frac{(2+3i)(2-i)-6(1+i)}{(1+i)(2-i)}$ $=\frac{4+4i+3-6-6i}{(1+i)(4+5i)}$ $=\frac{1-2i}{(1+i)(4+5i)}$ この式はまだ途中です。分母には，根号や虚数が含まれない形にしてはじめて計算終了です。気をつけていきましょう。

Q3	a, b を実数とする。 $a+bi=0 \Leftrightarrow a=0$ かつ $b=0$ が成り立つことを証明せよ。ただし, i は虚数単位とする。
A3	無理数や虚数の証明問題には直接証明ではなく, 背理法を用いるとうまくいく場合が多いです。 [1] $a+bi=0$・・・① $\Rightarrow$ $a=0$ かつ $b=0$・・・② を背理法によって証明する。 ①の条件のもと, $b \neq 0$ を仮定する・・・③と, ①より, $bi=-a$ を $b \neq 0$ で割ることによって, $i=-\dfrac{a}{b}$・・・④を得ます。 ④の左辺は虚数であるが, 右辺は実数であるので矛盾します。 よって, ③の仮定が誤りであるので, 背理法によって, $b=0$ であることが示されました。 このとき, ①は, $a=0$ となるので, ① $\Rightarrow$ ②が示されました。 ② $\Rightarrow$ ①の証明は簡単です。 [2] ② $\Rightarrow$ ①の証明 $a=0$ かつ $b=0$ であるから, $a+bi=0+0i=0$ よって, ② $\Rightarrow$ ①が示されました。 [1], [2]より, $a+bi=0 \Leftrightarrow a=0$ かつ $b=0$が示されました。

Q4	次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。 $$(1-i)x+(2+i)y=3+6i$$
A4	$(1-i)x+(2+i)y=3+6i$ を i について解くと， $(x+2y)+(-x+y)i=3+6i$ $x+2y$, $-x+y$ は実数であるから，複素数の相等より， $x+2y=3$ かつ $-x+y=6$ これを解いて，$x=-3$, $y=3$

Q5	複素数 z は 2 乗すると $2i$ になるという。この z を求めよ。ただし, i は虚数単位とする。
A5	$z=x+yi(x,\ y$ は実数$)$とおく。 $z^2=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi$ これが $2i$ に等しいから, $(x^2-y^2)+2xyi=2i$ $x^2-y^2,\ 2xy$ は実数であるから, 複素数の相等より, $x^2-y^2=0$・・・① かつ $2xy=2$・・・② ①より, $(x+y)(x-y)=0$ $\therefore y=-x$ または $y=x$・・・③ [i] $y=-x$ のとき ②に代入すると, $-x^2=1$ すなわち $x^2=-1$ x は実数であるので, これを満たす実数は存在しない。 [ii] $y=x$ のとき ②に代入すると, $x^2=1$ $\therefore x=\pm 1$ $x=1$ のとき, $y=1$, $x=-1$ のとき, $y=-1$ [i][ii]より, $z=1+i,\ \ -1-i$ (解説) $z^2=6i$ から $z=\pm\sqrt{6i}$ と安直に式変形してはいけません! $X^2=A$ から $X=\pm\sqrt{A}$ とするには, A が実数であるという条件が必要です。A が虚数のときは平方根が定義されていないので, 上記のように解答する必要があります。

Q6	2乗すると $8i$ になるような複素数を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。
A6	$z=x+yi(x,\quad y$ は実数）とおく。 $z^2=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi$ と式変形できる。これが $8i$ に等しい必要十分条件は，$(x^2-y^2)+2xyi=8i$・・・①が成り立つことである。 $x^2-y^2,\quad 2xy$ は実数であるから，複素数の相等より ① $\Leftrightarrow$ $x^2-y^2=0$ かつ $2xy=8$・・・② ② $\Leftrightarrow$ $(x+y)(x-y)=0$ かつ $xy=4$ $\Leftrightarrow$ $(x+y=0$ または $x-y=0)$ かつ $xy=4$ $\Leftrightarrow$ $(y=-x$ かつ $-x^2=4)$ または $(y=x$ かつ $x^2=4)$ $\Leftrightarrow$ $(y=-x$ かつ $x^2=-4)$ または $(y=x$ かつ $x=\pm 2)$ x は実数であるので，$x^2=-4$ となる実数は存在しない。 よって，求める必要十分条件は，$z=2+2i,\quad -2-2i$