次の式を因数分解せよ。

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$

(解答)

対称式であることに注意して $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ を利用します。

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3$

$=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y)$

$=A^3+z^3-3Axy(x+y=A$ とおいた$)$

$=(A+z)(A^2-Az+z^2)-3Axy$

$(\because (a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2))$

$=(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2)-3xy(x+y+z)$

$=(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2-3xy)$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

(解説)

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

この式は何に利用できるのでしょうか。残念ながら数学Ⅰ・A のみの学習では恩恵は得られません。一番最初に役立つのは数学Ⅱで相加平均・相乗平均を習うときでしょうか。3 次の相加平均・相乗平均の関係式は次のようになります。

$$\frac{a+b+c}{3} \leqq \sqrt[3]{abc}$$

これを示したかったら， $x=\sqrt[3]{a},\quad y=\sqrt[3]{b},\quad z=\sqrt[3]{c}$ とおくと因数分解の式が利用できるようになります。(詳しい解説は相加平均・相乗平均の項を参照。)

なお，やや技巧的であるが，数学Ⅱの 3 次方程式と解の係数を利用する次の方法もある。

実数係数の 3 次方程式 $t^3+at^2+bt+c=0$ の 3 解を$x,\quad y,\quad z$とすると，

解と係数の関係より，

$x+y+z=-a,\quad xy+yz+zx=b,\quad xyz=c$ が成り立つ。

これより，3 次方程式は，

$t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=0$・・・① とかける。

①に $t=x,\quad y,\quad z$ をそれぞれ代入すると，

$x^3-(x+y+z)x^2+(xy+yz+zx)x-xyz=0$・・・②

$y^3-(x+y+z)y^2+(xy+yz+zx)y-xyz=0$・・・③

$z^3-(x+y+z)z^2+(xy+yz+zx)z-xyz=0$・・・④

②＋③＋④より，

$x^3+y^3+z^3-(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx)(x+y+z)-3xyz=0$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$